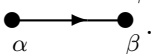


Induktion och rekursion

1. Om välgrundade binära relationer

Låt $\mathcal{R}$ vara en binär relation på en mängd $\mathcal{D}$. Vi skriver här $\alpha \mathcal{R} \beta$ för att uttrycka att $\alpha \in \mathcal{D}$ står i relationen $\mathcal{R}$ till $\beta \in \mathcal{D}$, i figur: 

Vi har tidigare talat om egenskaperna **reflexivitet**, **symmetri**, **antisymmetri** och **transitivitet** för binära relationer. Nu inför vi ännu en viktig egenskap för dem, ”**välgrundning**” (eng. well-foundedness).

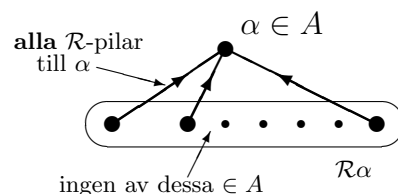
Beteckning:

För $\alpha \in \mathcal{D}$, låt $\mathcal{R}\alpha = \{\xi \in \mathcal{D} \mid \xi \mathcal{R} \alpha\}$.

α $\mathcal{R}$ -minimant i A :

Definition 1.1:

Elementet $\alpha \in A \subseteq \mathcal{D}$ är **$\mathcal{R}$ -minimant i A** omm det inte finns $\xi \in A$ med $\xi \mathcal{R} \alpha$, dvs omm $A \cap \mathcal{R}\alpha = \emptyset$.



Definition 1.2:

Relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D}$ är **välgrundad** (eng. **well-founded**) omm
för alla $A \subseteq \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$, finns $\alpha \in A$ som är $\mathcal{R}$ -minimant i A .

En **välordning** (eng. **well-order**) är detsamma som en välgrundad totalordning.

Exempel på välgrundade relationer:

- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\beta = \alpha + 1$
- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha < \beta$
- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha \mid \beta$ och $\alpha \neq \beta$
- $\mathcal{D} = \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ (mängden av alla ändliga delmängder till $\mathbb{N}$), $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha \subset \beta$

$\mathcal{R}$ i de första två exemplen är välgrundade eftersom varje icke-tom delmängd till $\mathbb{N}$ har ett minsta element. I det tredje exemplet är det minsta nollskilda elementet i $A \subseteq \mathbb{N}$ (om det finns något) $\mathcal{R}$ -minimant i A och om $A = \{0\}$ är 0 $\mathcal{R}$ -minimant i A . I det sista exemplet är ett $\alpha \in A$ med ett minimalt antal element (finns, eftersom antalen alla är naturliga tal) $\mathcal{R}$ -minimant i $A \subseteq \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$.

I det andra exemplet finns det exakt ett $\mathcal{R}$ -minimant element i varje icke-tom $A \subseteq \mathcal{D}$, men i de övriga exemplen finns för vissa $A \subseteq \mathcal{D}$ flera stycken.

Exempel på relationer som **inte** är välgrundade:

- $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\beta = \alpha + 1$
- $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha < \beta$
- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha > \beta$ (så $\mathcal{R}$ -minimal betyder maximal i vanlig mening)
- $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x\}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha < \beta$
- $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha \subset \beta$
- $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \alpha \rangle\}$

Exempel på $A \subseteq \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$, utan $\mathcal{R}$ -minimala element i dessa exempel är: $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \setminus \{0\}$, $\{\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ och $\mathcal{D}$.

Sats 1.1:

Om relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D}$ är välgrundad och relationen $\mathcal{R}_1$ på $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}$ uppfyller att $\alpha \mathcal{R}_1 \beta \Rightarrow \alpha \mathcal{R} \beta$ för alla $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_1$ (dvs $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$), så är $\mathcal{R}_1$ på $\mathcal{D}_1$ välgrundad.

Ty: Om $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{D}_1$ och α är $\mathcal{R}$ -minimalt i A , så är det också $\mathcal{R}_1$ -minimalt i A (eftersom $\mathcal{R}_1 \alpha \subseteq \mathcal{R} \alpha$ är $A \cap \mathcal{R}_1 \alpha \subseteq A \cap \mathcal{R} \alpha = \emptyset$). $\square$

Om en relation inte är välgrundad beror det alltså på att det finns ”för många pilar”. Om man tar bort pilar och/eller element från en välgrundad relation får man alltid en ny välgrundad relation.

Sats 1.2:

$\mathcal{R}$ på $\mathcal{D}$ är välgrundad omm det inte finns någon följd $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ med $\alpha_{i+1} \mathcal{R} \alpha_i$ för alla $i = 0, 1, 2, \dots$

Detta ger en karakterisering av välgrundade relationer som ofta är enklare att verifiera än definitionen ovan. De välgrundade relationerna är precis de som varken har någon *cykel* (dvs man kan inte genom att följa $\mathcal{R}$ -pilar bakåt komma tillbaks till elementet man startade i) eller någon *oändlig kedja bakåt* (dvs om man följer $\mathcal{R}$ -pilar bakåt måste det ta slut efter ett ändligt antal steg). Däremot kan det mycket väl finnas oändliga kedjor framåt, som i t.ex. $\mathbb{N}$ med $<$ som $\mathcal{R}$.

Övningar

Vg1) Visa sats 1.2. (För att visa ”om” krävs ett s.k. **urvalsaxiom**, dvs man måste anta att man kan göra ett oändligt antal val för att finna α_i :na.)

Vg2) Låt $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ vara välgrundade relationer på $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ (med $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$). Relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ definieras av att $\alpha \mathcal{R} \beta$ omm antingen $\alpha \in \mathcal{D}_1$ och $\beta \in \mathcal{D}_2$ eller $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_i$ och $\alpha \mathcal{R}_i \beta$ för $i = 1$ eller 2 .

Visa att $\mathcal{R}$ är välgrundad.

Vg3) Låt $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ vara välgrundade relationer på $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$.

Relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \mid \alpha_i \in \mathcal{D}_i\}$ definieras av att $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \mathcal{R} \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ omm antingen $\alpha_2 \mathcal{R}_2 \beta_2$ eller $\alpha_2 = \beta_2$ och $\alpha_1 \mathcal{R}_1 \beta_1$.

Visa att $\mathcal{R}$ är välgrundad.

Vg4) Låt $\mathcal{R}$ vara en välgrundad relation på $\mathcal{D}$.

Relationen $\mathcal{R}_l$ på $\mathcal{D}^{<\omega} = \{s \mid s : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}\}$ (mängden av ändliga följder från $\mathcal{D}$) definieras av att $s \mathcal{R}_l t$ omm för något $m \in \mathbb{N}$ gäller $s(i) = t(i)$ för $i = 0, \dots, m-1$ och antingen $s(m)$ inte definierat eller $s(m) \mathcal{R} t(m)$ (lexikografisk ordning, som bokstavsordning av ord).

Visa att $\mathcal{R}_l$ inte säkert är välgrundad (dvs det finns sådana $\mathcal{D}$ och $\mathcal{R}$ med $\mathcal{R}_l$ på $\mathcal{D}^{<\omega}$ icke-välgrundad).

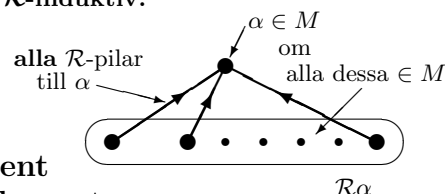
$\mathcal{R}$ -induktion och $\mathcal{R}$ -rekursion

Vi kommer nu till anledningen att välgrundning är en så viktig egenskap för binära relationer. Vi skall visa att relationen $\mathcal{R}$ kan användas för induktionsbevis och rekursiva definitioner av funktioner precis om $\mathcal{R}$ är välgrundad.

Definition 1.3:

Mängden $M \subseteq \mathcal{D}$ kallas **$\mathcal{R}$ -induktiv** omm
för alla $\alpha \in \mathcal{D}$: $\mathcal{R}\alpha \subseteq M \Rightarrow \alpha \in M$.

M $\mathcal{R}$ -induktiv:



Villkoret är tydligen precis att M :s komplement
 $M^c = \{\xi \in \mathcal{D} \mid \xi \notin M\}$ saknar $\mathcal{R}$ -minimant element.

(Villkoret kan ju skrivas $\mathcal{R}\alpha \cap M^c = \emptyset \Rightarrow \alpha \notin M^c$.)

Så, som en omformulering av definitionen av välgrundning får vi

Sats 1.3:

$\mathcal{R}$ är välgrundad omm $\mathcal{D}$ är den enda $\mathcal{R}$ -induktiva delmängden till $\mathcal{D}$.

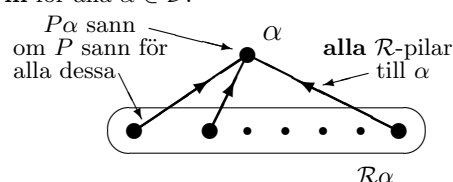
Om M är extensionen för en egenskap P ($M = \text{Ext}(P) = \{\alpha \in \mathcal{D} \mid P\alpha\}$) fås

Sats 1.4 ($\mathcal{R}$ -induktion):

Om $\mathcal{R}$ är välgrundad och för alla $\alpha \in \mathcal{D}$:
($P\beta$ för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$) $\Rightarrow P\alpha$
så gäller $P\alpha$ för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{R}$ -induktion:

Om för alla $\alpha \in \mathcal{D}$:



Då man skall visa $P\alpha$ för godtyckliga $\alpha \in \mathcal{D}$, kan
man alltså förutsätta $P\beta$ för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$!

så är $P\alpha$ sann för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.

Omvänt gäller ju att om $\mathcal{R}$ inte är välgrundad finns en mängd $M \subseteq \mathcal{D}$, $M \neq \emptyset$ som saknar $\mathcal{R}$ -minimant element. Om $\text{Ext}(P) = M^c$ gäller då för alla $\alpha \in \mathcal{D}$:
($P\beta$ för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$) $\Rightarrow P\alpha$, men för alla $\alpha \in M$ är $P\alpha$ falska.

Så $\mathcal{R}$ är välgrundad omm $\mathcal{R}$ -induktion fungerar för alla egenskaper P på $\mathcal{D}$.

Exempel på $\mathcal{R}$ -induktion:

- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\beta = \alpha + 1$ ger "vanlig" induktion över $\mathbb{N}$.
För att visa påståendet visar man det för 0 (det är ju sant för alla $\alpha \in \mathcal{D}$ med $\alpha \mathcal{R} 0$) och att det gäller för $k + 1$ om det gäller för k .
- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha < \beta$ ger s.k. "stark induktion" över $\mathbb{N}$.
För att visa påståendet för n får man förutsätta det för alla $k < n$.
- $\mathcal{D} = \mathbb{Q}$, de rationella talen, $\alpha \mathcal{R} \beta$ betyder $\alpha < \beta$.
 $\mathcal{R}$ är inte en välgrundad relation och egenskapen $P\alpha : \alpha \leq 0$ uppfyller att ($P\beta$ för alla $\beta < \alpha$) $\Rightarrow P\alpha$, men $P\alpha$ är inte sann för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.
- Om $(\mathcal{D}, <)$ är en välordning, gäller för varje växande $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ (dvs $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ för alla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{D}$) att $f(\alpha) \geq \alpha$ för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.
Ty: Om $f(\beta) \geq \beta$ för alla $\beta < \alpha \in \mathcal{D}$, kan inte $f(\alpha) < \alpha$ (det skulle ge $f(f(\alpha)) < f(\alpha)$, omöjligt då $f(\alpha) < \alpha$), så $f(\alpha) \geq \alpha$. Induktion. $\square$

Som vanligt hänger **induktion** (för att bevisa påståenden) nära samman med **rekursion** (för att definiera funktioner). Att tilldela sanningsvärden är ju att definiera en funktion som tar sanningsvärdena, så induktion kan ses som ett specialfall av rekursion. Å andra sidan används induktion för att bevisa sats 1.5 nedan om rekursion.

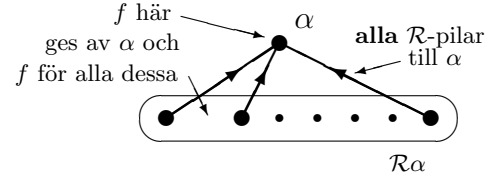
Låt $g(\alpha, h_\alpha)$ vara definierad, med värden i Y , för $\alpha \in \mathcal{D}$ och $h_\alpha : \mathcal{R}\alpha \rightarrow Y$ (där Y är någon mängd).

Definition 1.4:

$f : \mathcal{D} \rightarrow Y$ är **$\mathcal{R}$ -rekursiv** (med g) omm för alla $\alpha \in \mathcal{D}$ gäller

$$f(\alpha) = g(\alpha, f|_{\mathcal{R}\alpha}).$$

f **$\mathcal{R}$ -rekursiv** om för alla $\alpha \in \mathcal{D}$:



$f|_{\mathcal{R}\alpha} : \mathcal{R}\alpha \rightarrow Y$ är här **restriktionen** av f till $\mathcal{R}\alpha$, definierad av att $f|_{\mathcal{R}\alpha}(\xi) = f(\xi)$, alla $\xi \in \mathcal{R}\alpha$.

Då gäller för varje sådant g den viktiga

Sats 1.5 ($\mathcal{R}$ -rekursion):

Om $\mathcal{R}$ är välgrundad finns **precis en** $\mathcal{R}$ -rekursiv (med g) funktion på $\mathcal{D}$.

Idén med beviset är att med induktion över α bevisa att det finns $f(\alpha)$ som bestäms entydigt av rekursionsvillkoret. För att formulera det använder vi

Definition 1.5:

$A \subseteq \mathcal{D}$ är **$\mathcal{R}$ -ärfklik** (eng. **$\mathcal{R}$ -hereditary**) omm för alla $\alpha \in A$ gäller $\mathcal{R}\alpha \subseteq A$.

Notera följande:

- Godtyckliga unioner av $\mathcal{R}$ -ärfklikar är $\mathcal{R}$ -ärfklikar.
Ty: om $\alpha \in \bigcup_i A_i$, där A_i alla är $\mathcal{R}$ -ärfklikar, gäller ju $\alpha \in A_{i_0}$ för något i_0 , så $\mathcal{R}\alpha \subseteq A_{i_0}$ och därmed $\mathcal{R}\alpha \subseteq \bigcup_i A_i$. □
- Godtyckliga skärningar av $\mathcal{R}$ -ärfklikar är $\mathcal{R}$ -ärfklikar.
Ty: om $\alpha \in \bigcap_i A_i$, där A_i alla är $\mathcal{R}$ -ärfklikar, gäller ju $\alpha \in A_{i_0}$ för alla i_0 , så $\mathcal{R}\alpha \subseteq A_{i_0}$ alla i_0 , och därmed $\mathcal{R}\alpha \subseteq \bigcap_i A_i$. □
- Om det för varje $\beta \in \mathcal{R}\alpha$ finns en $\mathcal{R}$ -ärfklik mängd A_β med $\beta \in A_\beta$,
är $A_\alpha = \{\alpha\} \cup \bigcup_{\beta \in \mathcal{R}\alpha} A_\beta$ en $\mathcal{R}$ -ärfklik mängd med $\alpha \in A_\alpha$.
Ty: om $\gamma \in A_\alpha$ måste $\gamma = \alpha$ eller $\gamma \in A_\beta$, för något $\beta \in \mathcal{R}\alpha$.
I båda fallen gäller $\mathcal{R}\gamma \subseteq A_\alpha$. □

Bevis för sats 1.5 om $\mathcal{R}$ -rekursion:

Vi har som i satsen en välgrundad relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D}$ och en funktion $g(\alpha, h_\alpha)$.

1. **Entydighet:** Om $A \subseteq \mathcal{D}$ är $\mathcal{R}$ -ärfklik och f_1 och f_2 är funktioner $A \rightarrow Y$ som för alla $\alpha \in A$ uppfyller

$$f(\alpha) = g(\alpha, f|_{\mathcal{R}\alpha}), \quad (*)$$

så är $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ för alla $\alpha \in A$. ((*) har mening, ty A är $\mathcal{R}$ -ärfklik.)

Det visas med $\mathcal{R}$ -induktion ($\mathcal{R}$ är ju välgrundad på A): Om $\alpha \in A$ och $f_1(\beta) = f_2(\beta)$ för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$, gäller $f_1(\alpha) = g(\alpha, f_1|_{\mathcal{R}\alpha}) = g(\alpha, f_2|_{\mathcal{R}\alpha}) = f_2(\alpha)$.

2. **Förening:** Om $f_i : A_i \rightarrow Y$ uppfyller (*) på de $\mathcal{R}$ -ärfklikar $A_i \subseteq \mathcal{D}$, så finns en funktion $f_\cup : \bigcup_i A_i \rightarrow Y$ som uppfyller (*) för alla $\alpha \in \bigcup_i A_i$.

Varje par av funktionerna tar samma värden i punkter där båda är definierade, ty f_{i_1} och f_{i_2} uppfyller båda (*) på den $\mathcal{R}$ -ärfklikar $A_{i_1} \cap A_{i_2}$, så enligt 1. är $f_{i_1}(\alpha) = f_{i_2}(\alpha)$ för alla $\alpha \in A_{i_1} \cap A_{i_2}$. Då kan vi för $\alpha \in \bigcup_i A_i$ definiera $f_\cup(\alpha) = f_{i_0}(\alpha)$ om $\alpha \in A_{i_0}$ (det blir ju oberoende av valet av sådant i_0).

$f_\cup$ uppfyller då (*) eftersom alla f_i gör det.

3. **Lokal existens:** Vi visar med $\mathcal{R}$ -induktion att för alla $\alpha \in \mathcal{D}$ gäller att det finns en $\mathcal{R}$ -ärfklik mängd $A_\alpha \subseteq \mathcal{D}$, med $\alpha \in A_\alpha$, och en funktion $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow Y$ som uppfyller (*).

Antag alltså att sådana A_β och f_β finns för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$. Definiera då på den $\mathcal{R}$ -ärfthliga $A_\alpha = \{\alpha\} \cup \bigcup_{\beta \in \mathcal{R}\alpha} A_\beta$ funktionen f_α enligt 2. på $\bigcup_{\beta \in \mathcal{R}\alpha} A_\beta$ och sedan $f_\alpha(\alpha) = g(\alpha, f_\alpha|_{\mathcal{R}\alpha})$. f_α uppfyller då (*) och $\mathcal{R}$ -induktionen är klar.

4. **Existens:** Enligt 2. kan alla f_α förenas till f som uppfyller (*) på hela $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}} A_\alpha = \mathcal{D}$. $\square$

Om satsen känns alldeles självklar, tänk på att vi inte förutsatt något om $\mathcal{D}$:s kardinalitet. Satsen gäller för alla välgrundade relationer, även på mycket stora (oändliga) mängder $\mathcal{D}$.

Alla välordningar är lika (så långt de räcker)

Vi visar att två välordnade mängder "ser likadana ut tills en av dem tar slut".

Definition 1.6:

Om $(X, <)$ är en totalordnad mängd och $a \in X$ kallas $X_a = \{x \in X \mid x < a\}$ ett **inledande segment** i X .

Definition 1.7:

Två ordnade mängder $(X, <)$ och $(Y, <)$ är **isomorfa**, skrivet $(X, <) \cong (Y, <)$ (eller ofta $X \cong Y$) omm det finns en **bijektion** $\varphi: X \rightleftharpoons Y$ (dvs en funktion som är enentydig och på) sådan att $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in X$.

Ett sådant φ kallas en **isomorfi** mellan X och Y .

(Allmänt är en isomorfi en bijektion som bevarar relevant struktur på mängder (här ordningen). Biggs betecknar isomorfi med ' $\approx$ ' i stället för ' $\cong$ '.)

Sats 1.6 (relationer mellan välordningar):

Om $(X, <)$ och $(Y, <)$ är välordnade mängder så gäller precis en av

- $X \cong Y_b$ för ett entydigt bestämt $b \in Y$,
- $X \cong Y$,
- $X_a \cong Y$ för ett entydigt bestämt $a \in X$.

Ty: Låt $* \notin Y$ och definiera $f: X \rightarrow Y \cup \{*\}$ rekursivt enligt

$$f(x) = \begin{cases} * & \text{om } Y \setminus f[X_x] = \emptyset \quad (\text{dvs } Y \subseteq f[X_x]), \\ \text{det minsta elementet i } Y \setminus f[X_x] & \text{annars.} \end{cases}$$

Enligt sats 1.5 är $f(x)$ entydigt definierad för alla $x \in X$.

Om $x \in X$, $\xi \in X_x$, $\eta \in Y_{f(x)}$ och $f(x) \neq *$:

$\emptyset \neq Y \setminus f[X_x] \subseteq Y \setminus f[X_\xi]$, så $* \neq f(\xi) < f(x)$ ($f(\xi) \in f[X_x]$ är minst i $Y \setminus f[X_\xi] \supseteq Y \setminus f[X_x] \ni f(x)$), så $\xi_1 < \xi_2$ i X_x ger $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ (dvs $f|_{X_x}$ är strängt växande, så injektiv) och $\eta \notin Y \setminus f[X_x]$ (ty $f(x)$ är minst i den), $\eta \in f[X_x]$ (så $f|_{X_x}$ är surjektiv).

Det ger att $(f[X_x], <) \cong (Y_{f(x)}, <)$ (med isomorfin $f|_{X_x}$), om $x \in X$, $f(x) \neq *$.

- Om $f[X] \subset Y$ är $\varphi: X \rightleftharpoons Y_b$ en isomorfi ($\varphi(x) = f(x)$ i X , b minst i $Y \setminus f[X]$),
- om $f[X] = Y$ är $\varphi = f: X \rightleftharpoons Y$ en isomorfi,
- om $* \in f[X]$ är $\varphi: X_a \rightleftharpoons Y$ en isomorfi (a minst i X med $f(a) = *$, $\varphi = f|_{X_a}$).

Om $(\mathcal{D}, <)$ är en välordning, $\beta \in \mathcal{D}$ och $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_\beta$ vore en isomorfi skulle $\varphi(\alpha) \geq \alpha$, alla $\alpha \in \mathcal{D}$ (sista exemplet efter sats 1.4). Motsägelse ($\varphi(\beta) \notin \mathcal{D}_\beta$), så det finns ingen isomorfi $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_\beta$ och den enda isomorfin $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ är $\varphi = id_{\mathcal{D}}$.

Det ger att $X \not\cong X_a$ för $a \in X$ och att $X_{a_1} \cong X_{a_2}$ ($a_1, a_2 \in X$) omm $a_1 = a_2$. Det (och motsvarande för Y) ger entydigheten, t.ex. om $\varphi_1: X \rightarrow Y_{b_1}$ och $\varphi_2: X \rightarrow Y_{b_2}$ är isomorfier, är $\varphi_2 \varphi_1^{-1}: Y_{b_1} \rightarrow Y_{b_2}$ en isomorfi, så $b_1 = b_2$ och $\varphi_1 = \varphi_2$ etc. $\square$

2. Rekursivt definierade mängder

Det är vanligt att mängden $\mathcal{D}$ i förra avsnittet själv har definierats rekursivt, på det sätt som beskrivs i detta avsnitt. En del vill kalla det att mängden är induktivt definierad och i datalogiska sammanhang talar man ofta om rekursivt definierade datatyper.

Exempel:

$\mathbb{N}$, mängden av de naturliga talen, kan definieras som den **minsta** delmängd till (t.ex.) de komplexa talen $\mathbb{C}$ som uppfyller

- (1) $0 \in \mathbb{N}$,
- (2) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$, för alla x .

Villkoret att $\mathbb{N}$ är den minsta sådana mängden uttrycks ofta som en tredje punkt, att ”inget ingår i $\mathbb{N}$ som inte tvingas till det av (1) och (2)” eller liknande (eller så tolkas uttrycket att $\mathbb{N}$ **definieras rekursivt** av (1) och (2) just så).

För att detta skall definiera en mängd $\mathbb{N}$ krävs förstås att det säkert finns en minsta mängd som uppfyller (1) och (2), dvs att för varje $M \subseteq \mathbb{C}$ som uppfyller (1) och (2) (t.ex. $M = \mathbb{Q}$) gäller $\mathbb{N} \subseteq M$.

Vi skall visa att det alltid finns en sådan minsta mängd i en mer allmän situation.

Definition 2.1:

En mängd $\mathcal{K}$ är en **konstruktormängd på mängden X** omm
varje $k \in \mathcal{K}$ är en n_k -ställig funktion, $k : \underbrace{X \times \dots \times X}_{n_k \text{ st}} \rightarrow X$, för något $n_k \in \mathbb{N}$.

(I själva verket räcker det att $k \in \mathcal{K}$ är definierad på en delmängd till $X \times \dots \times X (= X^{n_k})$.

Om $n_k = 0$ är k en konstant (bara en möjlig följd invärden, den tomma följden, så bara ett värde).)

I exemplet med $\mathbb{N}$ ovan kan vi ta $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{K} = \{z, S\}$, med $n_z = 0, n_S = 1$ och $z() = 0, S(x) = x + 1$ för alla $x \in \mathbb{C}$.

Definition 2.2:

Om X är en mängd och $\mathcal{K}$ en konstruktormängd på X ,
definieras $\mathcal{D} \subseteq X$ rekursivt av $\mathcal{K}$ omm

$\mathcal{D}$ är den minsta (dvs är innehållen i alla andra sådana) mängd som uppfyller

- för alla $k \in \mathcal{K}$ och $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}) \in \mathcal{D}^{n_k}$ gäller $k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}) \in \mathcal{D}$,

dvs **$\mathcal{D}$ är sluten under verkan av alla $k \in \mathcal{K}$** ($k|_{\mathcal{D}^{n_k}}$ tar bara värden i $\mathcal{D}$).

(Oftast kallar man $k \in \mathcal{K}$ med $n_k \neq 0$ för **konstruktörer** (eng. **constructors**) och (konstanterna som motsvarar) dem med $n_k = 0$ för basvärden eller liknande. Om $n_k \neq 0$ för alla $k \in \mathcal{K}$ är $\mathcal{D} = \emptyset$.)

Sats 2.1:

Varje konstruktormängd $\mathcal{K}$ på en mängd X
definierar rekursivt precis en mängd $\mathcal{D} \subseteq X$.

Vi skall formulera och bevisa en lite mer allmän sats som genast ger sats 2.1.

Definition 2.3:

En partialordnad mängd $(S, \preceq)$ kallas ett **fullständigt** (eng. complete) **lattice** omm varje $T \subseteq S$ har ett **supremum** $\bigvee T$ och ett **infimum** $\bigwedge T$, dvs

- för alla $t \in T$: $\bigwedge T \preceq t \preceq \bigvee T$,
- för alla $s \in S$: $(s \preceq t \text{ för alla } t \in T) \Rightarrow s \preceq \bigwedge T$,
- för alla $s \in S$: $(t \preceq s \text{ för alla } t \in T) \Rightarrow \bigvee T \preceq s$.

(Infimum och supremum kallas också **största undre begränsning** och **minsta övre begränsning**. "Lattice" rimmar på svenska med "Kattis". Det svenska **gitter** verkar användas mindre.)

Observera att det i ett fullständigt lattice alltid finns både ett **största** och ett **minsta element**, nämligen $\bigwedge \emptyset$ respektive $\bigvee \emptyset$ (sic!).

Exempel på fullständiga lattice:

För varje mängd M är potensmängden $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ett fullständigt lattice, med union $\bigcup$ och skärning $\bigcap$ som sup och inf (största element: $M = \bigcap \emptyset$, minsta: $\emptyset = \bigcup \emptyset$).

$((S, \preceq)$ kallas ett **lattice** (inte säkert fullständigt) omm sup och inf finns för alla delmängder med precis två element (och därmed för alla ändliga, icke-tomma delmängder till S), $s_1 \vee s_2$ och $s_1 \wedge s_2$.

Exempel på lattice som inte är fullständiga:

- $(\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ eller } \mathbb{N} \setminus A \text{ ändlig}\}, \subseteq)$. Mängden $\{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \dots\}$ har här många övre begränsningar, men ingen av dem är minst, så inget sup.
- $(\mathbb{Q}, \leq)$. Mängden $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ har varken sup eller inf (i $\mathbb{Q}$).

Sats 2.2 (Tarski-Knasters fixpunktssats):

I ett **fullständigt** lattice $(S, \preceq)$ med en **ordningbevarande** $g : S \rightarrow S$ (dvs $s_1 \preceq s_2 \Rightarrow g(s_1) \preceq g(s_2)$, alla $s_1, s_2 \in S$) har g en **minsta fixpunkt** ($s \in S$ med $g(s) = s$).

Ty: Låt $T = \{t \in S \mid g(t) \preceq t\}$ och $s = \bigwedge T$. För alla $t \in T$ är då $s \preceq t$, så $g(s) \preceq g(t) \preceq t$ och därmed $g(s) \preceq s$ (ty $g(s)$ är en undre begränsning till T).

Men $g(s) \preceq s$ ger $g(g(s)) \preceq g(s)$, så $g(s) \in T$ och $s (= \bigwedge T) \preceq g(s)$.

Alltså är $s = g(s)$, den minsta fixpunkten (alla fixpunkter tillhör ju T). □

(På motsvarande sätt kan man visa att g har en **största** fixpunkt.)

Bevis för sats 2.1: Låt i sats 2.2 $(S, \preceq) = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ och

$g(A) = A \cup \{k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}) \mid k \in \mathcal{K}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_k} \in A\}$ för $A \in \mathcal{P}(X)$. □

(Alt. Eftersom $A \subseteq g(A)$ är $\bigcup \{g^n(\emptyset) \mid n \in \mathbb{N}\}$ en minsta fixpunkt.)

Induktionsbevis kan användas på varje rekursivt definierad mängd,

Sats 2.3 (induktion på en rekursivt definierad mängd):

Om konstruktormängden $\mathcal{K}$ på X rekursivt definierar $\mathcal{D} \subseteq X$ och egenskapen P är sådan att för alla $k \in \mathcal{K}$ och $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k} \in X$ gäller

$$(P\alpha_i \text{ för } i = 1, \dots, n_k) \Rightarrow Pk(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}),$$

så gäller $P\alpha$ för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.

Ty: $A = \{\alpha \in X \mid P\alpha\}$ är sluten under verkan av alla $k \in \mathcal{K}$, så enligt definitionen av $\mathcal{D}$ som den minsta sådana har vi $\mathcal{D} \subseteq A$. □

Exemplet med $\mathcal{K} = \{z, S\}$ och $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ger vanlig induktion, villkoret i satsen för z ger basen och det för S ger steget.

När kan man då använda rekursion för att definiera en funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow Y$ på en rekursivt definierad mängd? Vi vill att $f(\alpha)$ ska bestämmas av $f(\alpha_i)$ ($i = 1, \dots, n_k$) om $\alpha = k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k})$ för något $k \in \mathcal{K}$, men för att det säkert skall fungera måste vi kräva något av $\mathcal{K}$:s verkan i $\mathcal{D}$. Det räcker enligt följande sats att α inte kan fås på mer än ett sätt, men för vissa $g(\alpha, h_\alpha)$ kan svagare villkor vara tillräckliga. Det räcker ju att alla sätt att få $\alpha \in \mathcal{D}$ leder till samma värde för $f(\alpha)$.

Definition 2.4:

$\mathcal{D}$ definieras entydigt rekursivt av konstruktormängden $\mathcal{K}$ på X omm

- $\mathcal{D}$ definieras rekursivt av $\mathcal{K}$ och
- det för varje $\alpha \in \mathcal{D}$ finns **precis ett** $k \in \mathcal{K}$ och **ett** $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}) \in \mathcal{D}^{n_k}$ med $\alpha = k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k})$.

Sats 2.4:

Låt $\mathcal{D}$ vara entydigt rekursivt definierad av konstruktormängden $\mathcal{K}$ och låt den binära relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D}$ definieras av att

$$\alpha = k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}), k \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{R}\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}\}.$$

$\mathcal{R}$ är då en **välgrundad relation på $\mathcal{D}$** .

Ty: Låt $P\alpha$ ($\alpha \in \mathcal{D}$) betyda att för alla $A \subseteq \mathcal{D}$: $\alpha \in A \Rightarrow A$ har ett $\mathcal{R}$ -minimalt element. Vi visar med induktion över $\mathcal{D}$ att $P\alpha$ är sant för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.

Antag att $\alpha = k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k})$, $k \in \mathcal{K}$ och att $P\alpha_i$ är sant för $i = 1, \dots, n_k$. Om $\alpha \in A \subseteq \mathcal{D}$ är antingen α $\mathcal{R}$ -minimalt i A eller så gäller $\alpha_i \in A$ för (minst) ett $i = 1, \dots, n_k$ och A har (enligt antagandet) ett $\mathcal{R}$ -minimalt element, så $P\alpha$ sant. Sats 2.3 ger $P\alpha$ för alla $\alpha \in \mathcal{D}$, så $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow A$ har ett $\mathcal{R}$ -minimalt element. $\square$

Sats 2.5 (rekursion på en entydigt rekursivt definierad mängd):

Om $\mathcal{D}$ är entydigt rekursivt definierad av konstruktormängden $\mathcal{K}$ på X och $g_k : \mathcal{D} \times Y^{n_k} \rightarrow Y$ för varje $k \in \mathcal{K}$ är given, finns precis en $f : \mathcal{D} \rightarrow Y$ med

$$f(\alpha) = g_k(\alpha, f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{n_k})) \text{ för alla } \alpha = k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k}).$$

Ty: Följer direkt ur satserna 1.5 (om $\mathcal{R}$ -rekursion) och 2.4. ($g_k(\alpha, f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{n_k}))$ motsvarar ju $g(\alpha, f|_{\mathcal{R}\alpha})$ med de satsernas beteckningar. Entydigheten gör att k bestäms av α .) $\square$

Som vi nämnde före definition 2.4 kan man ibland lätta på villkoret att $\mathcal{D}$ är entydigt rekursivt definierad av $\mathcal{K}$. Ett viktigt fall är att alla omkastningar av $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_k}$ ger samma $k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_k})$ (så det bara beror av **mängden** $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_k}\}$) och detsamma gäller för g_k , fungerar rekursionen fortfarande (dvs det finns en entydig rekursivt definierad funktion).

I nästa avsnitt finner vi ett exempel på användning av bl.a. sats 2.5.

3. Exemplet satslogiska sentenser och deras sanningsvärden

I **satslogik** (eng. **propositional calculus**) studerar man vissa strängar av symboler som representerar påståenden. Strängarna byggs upp av **atomära sentenser** (symboler som representerar enkla påståenden), **konnektiv** och **parenteser**.

Exempel:

Om vi låter A betyda 'det är lördag' och B betyda 'Lisa läser diskret matte', kan det sammansatta påståendet 'om det är lördag, läser Lisa diskret matte' skrivas

$$A \rightarrow B$$

Med olika konnektiv kan man med samma A och B uttrycka t.ex.

$\neg A$	'det är inte lördag'
$A \wedge B$	'det är lördag och Lisa läser diskret matte'
$A \vee B$	'det är lördag eller Lisa läser diskret matte (eller båda)'
$B \rightarrow A$	'det är lördag om Lisa läser diskret matte'
$A \leftrightarrow B$	'det är lördag om och endast om Lisa läser diskret matte'

De olika konnektiven kallas

negation 'inte' ($\neg$),

konjunktion 'och' ($\wedge$),

disjunktion 'eller' ($\vee$),

implikation 'endast om' ($\rightarrow$) och

dubbel implikation 'om och endast om', 'omm' ($\leftrightarrow$).

$\neg$ är ett **1-ställigt konnektiv** (verkar på en sentens) och $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ är **2-ställiga**.

Det kan fortsättas. Om den atomära sentensen C står för 'solen skiner', kan den komplicerade utsagan

'om det är lördag eller Lisa läser diskret matte (eller båda) så skiner solen inte om och endast om det både är lördag och Lisa läser diskret matte'

(åtminstone enligt ett sätt att uppfatta den) (stegvis) översättas till en sentens enligt

"om A eller B (eller båda) så $\neg C$ omm både A och B "

så:

$$(A \vee B) \rightarrow (\neg C \leftrightarrow (A \wedge B))$$

Låt $\mathcal{L}$ vara en mängd enkla symboler, de **atomära satslogiska sentenserna** ($\mathcal{L} = \{A, B, C\}$ i exemplet). Ingen av $\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ eller parenteser tillhör $\mathcal{L}$.

Definition 3.1:

Mängden av (satslogiska) sentenser över $\mathcal{L}$ definieras rekursivt av

- (1) Om $p \in \mathcal{L}$, är p en sentens.
- (2) $\perp$ är en sentens.
- (3) Om p är en sentens, är $\neg p$ en sentens.
- (4) Om p, q är sentenser, är $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ sentenser.
- (5) Varje sentens är en ändlig sträng av symboler som kan visas vara en sentens genom att använda (1)–(4) ett ändligt antal gånger.

$\perp$ kallas **falsum** och tolkas som ett påstående som alltid är falskt. Den tillhör alltså inte $\mathcal{L}$, utan är ett **0-ställigt konnektiv**.

Enligt sats 2.1 definierar detta mängden av sentenser över $\mathcal{L}$ entydigt.

(Med $X = S_{\mathcal{L}} = (\mathcal{L} \cup \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\})^{<\omega}$, $\mathcal{K} = \{k_p \mid p \in \mathcal{L}\} \cup \{k_{\perp}, k_{\neg}, k_{\wedge}, k_{\vee}, k_{\rightarrow}, k_{\leftrightarrow}\}$, där $n_{k_p} = n_{k_{\perp}} = 0$, $k_p() = p$ för $p \in \mathcal{L}$, $k_{\perp}() = \perp$, $n_{k_{\neg}} = 1$, $k_{\neg}(p) = \neg p$ och $n_{k_{\circ}} = 2$, $k_{\circ}(p, q) = (p \circ q)$ för $\circ = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$).

I själva verket är $(A \vee B) \rightarrow (\neg C \leftrightarrow (A \wedge B))$ ovan inte en mening med denna definition, det saknas parenteser kring alltsammans. Sådana yttre parenteser sätts normalt inte ut, utan man betraktar dem som underförstådda ("de är osynliga"). Ofta använder man ytterligare konventioner om parenteser för att öka läsbarheten, t.ex. att $\wedge$ och $\vee$ "binder starkare" än $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$, så $A \wedge B \rightarrow C$ (inte en mening enligt definitionen, ens med parenteser runt) ska tolkas som $((A \wedge B) \rightarrow C)$, inte $(A \wedge (B \rightarrow C))$. Här kommer vi att hålla oss till definitionen ovan, bortsett från de yttre parenteserna.

Med definitionen ovan är mängden sentenser över $\mathcal{L}$ i själva verket **entydigt** rekursivt definierad (tack vare bruket av parenteser) och vi kan definiera funktioner av sentenser (t.ex. sanningsvärden) med rekursion, enligt sats 2.5.

Sats 3.1:

Låt $\mathcal{L}$ vara en mängd atomära satslogiska sentenser.

Varje satslogisk mening över $\mathcal{L}$ är då **precis en** av

- ett element i $\mathcal{L}$,
- $\perp$,
- $\neg p$ för en entydigt bestämd mening p och
- $(p \circ q)$ för $\circ$ en av $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ och p, q entydigt bestämda sentenser.

Ty: För $r \in S_{\mathcal{L}} (= (\mathcal{L} \cup \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\})^{<\omega})$ låter vi Pr betyda att följande båda villkor är uppfyllda:

ent: strängen r kan fås med exakt en av konstruktorerna $k_{\circ}$ (som ovan, med $\circ \in \mathcal{L} \cup \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$) och bara ett p med Pp för $k_{\neg}$, bara ett enda par (p, q) med Pp, Pq för $k_{\wedge}, k_{\vee}, k_{\rightarrow}, k_{\leftrightarrow}$ och

bal: r har balanserade parenteser, dvs lika många '(' som ')', den första parentesen i r (om någon finns) är en '(' och varje ')' som ger balans (dvs det finns en mer '(' än ')') före den är den sista symbolen i r och om r inte har några parenteser innehåller det inte heller någon av $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Enligt sats 2.3 räcker det att för $p, q \in S_{\mathcal{L}}$ visa:

1. Pp för varje $p \in \mathcal{L}$, 2. $P\perp$, 3. $Pp \Rightarrow P\neg p$ och
4. $(Pp \text{ och } Pq) \Rightarrow P(p \circ q)$ för $\circ = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

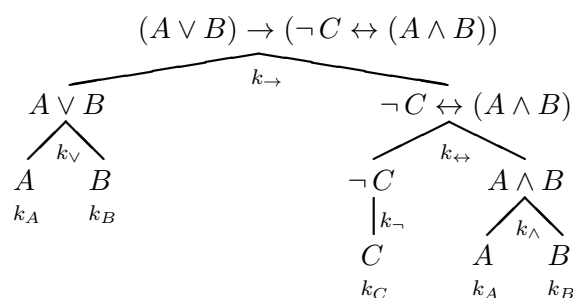
1., 2. och 3. är klara (**ent:** bara k_p kan ge A för $p \in \mathcal{L}$, bara $k_{\perp}$ ger $\perp$ och bara $k_{\neg}$ ger $\neg p$, bara för p med Pp , **bal:** A och $\perp$ innehåller inga parenteser, så **bal**, och **bal** för p ger den för $\neg p$).

4. Pp och Pq ger **ent:** $(p \circ q)$ kan bara fås med en av k_* , $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (eftersom den börjar med '('). Enligt **bal** för p måste $*$ vara den första av $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ som har en mer '(' än ')' före sig, så $* = \circ$ och p, q entydiga, **bal:** följer ur **bal** för p, q .

Så Pr gäller för alla sentenser r över $\mathcal{L}$ (enligt deras definition och sats 2.3). $\square$

Entydigheten i satsen ger att varje mening kan härledas på precis ett sätt. Vi kan beskriva meningen med ett **träd**, som enligt sats 3.1 är entydigt bestämt av meningen.

Exempel: trädet för sentensen $(A \vee B) \rightarrow (\neg C \leftrightarrow (A \wedge B))$



$k_{\rightarrow}, k_{\vee}, \dots$ står under de sentenser de ger då $(A \vee B) \rightarrow (\neg C \leftrightarrow (A \wedge B))$ härleds.

Tolkningar, sanningsvärden

Om ett påstående som 'det är lördag och Lisa läser diskret matte' ($A \wedge B$ ovan) är sant, bestäms förstås helt av om det är sant att det är lördag och om det är sant att Lisa läser diskret matte.

För att beskriva **sanningsvärden** betecknar vi **sant** med 1, **falskt** med 0.

Med en **tolkning** av ett satslogiskt språk menar vi en tilldelning av sanningsvärden till alla atomära sentenser, dvs en funktion $v : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$.

Betydelsen av de olika konnektiven kan beskrivas med tabeller:

$\perp$	p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	1	0	1	1	1	1	1	1
'falsum'	0	1	1	0	0	1	0	0
		'inte'	0	1	0	1	1	0
			0	0	0	0	1	1
					'och'	'eller'	'medför'	'omm'
					'men'		'bara om'	

p och q står här för godtyckliga sentenser, så enligt (sats 3.1 och) sats 2.5 definieras sanningsvärden i en given tolkning rekursivt för alla sentenser.

Exempel: En **sanningsvärdestabell** för $(A \vee B) \rightarrow (\neg C \leftrightarrow (A \wedge B))$

(med en rad för varje möjlig tolkning av språket $\mathcal{L} = \{A, B, C\}$)

A	B	C	$(A \vee B)$	$\rightarrow$	$(\neg C \leftrightarrow (A \wedge B))$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0

Under konnektiven står sanningsvärdet i de olika tolkningarna för motsvarande delar. Under $\vee$ i $A \vee B$ står t.ex. sanningsvärdena för $A \vee B$. Inramat, under det högsta konnektivet, står hela sentensens sanningsvärden.

I trädet ovan ges löven sanningsvärden enligt tolkningen och tabellerna för konnektiven ger värden steg för steg till roten (högst upp (!)).

4. $\mathcal{R}$ -rekursion på Knarrön, ett par paradoxer

På den fjärran Knarrön är var och en av invånarna precis endera av kung och narr. Märkligt nog talar kungar alltid sanning, medan narrar alltid ljuger. Öborna vet alla vilken typ var och en av dem är, men eftersom vi utsocknes inte vet det måste vi försöka lista ut det med ledning av vad de säger.

Exempel:

A och B är båda knarröbor och A säger: ”Minst en av B och mig är narr”. Vad är A och B?

Jo, om A vore narr skulle hans utsaga vara sann, motsägelse, så A måste vara kung och eftersom det han säger alltså är sant är B narr. (Detta förutsätter att det finns en lösning, vilket vi lätt kontrollerar att det vi kommit fram till är.)

Ett mer ”mekaniskt” sätt att lösa knarrögåtor (som också kan användas för att konstruera dem) utnyttjar sanningsvärdestabeller:

Om öbon A påstår p och de atomära sentenserna A , B betyder att A respektive B är kung, vet vi att $A \leftrightarrow p$ är sant (A och p båda sanna eller båda falska). I vårt exempel är p sentensen $\neg A \vee \neg B$, så sanningsvärdestabellen för $A \leftrightarrow p$ blir som till höger.

A	B	$A \leftrightarrow$	$(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Ett typiskt knarröproblem kan vara att vi har en samling knarröbor som var och en gör uttalanden om sina och andras grupptillhörigheter. Det betyder ju, om vi låter A_i vara påståendet att person nummer i är kung och hans olika utsagor betecknas $\phi_{i\alpha}(A_1, A_2, \dots)$ (där $\alpha \in u_i$ för någon mängd u_i), att möjliga sanningsvärden för A_i :na är precis de som gör alla följande sentenser sanna:

$$\{A_i \leftrightarrow \phi_{i\alpha}(A_1, A_2, \dots) \mid i = 1, 2, \dots, \alpha \in u_i\}.$$

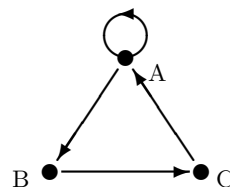
Det kan också ses som ett rekursionsproblem. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen ”omtalas av”, dvs $j\mathcal{R}i$ betyder att A_j ingår i $\phi_{i\alpha}$, att $\phi_{i\alpha}$:s sanningsvärde kan påverkas av A_j :s, för något $\alpha \in u_i$. Om $f(i)$ är sanningsvärdet för A_i kan villkoret att sentenserna ovan alla är sanna formuleras som att $f(i) = g(i, \langle f(1), f(2), \dots \rangle) = g(i, f|\mathcal{R}_i)$ (där $g(i, \dots)$ bestäms av $\phi_{i\alpha}$:na) dvs som $\mathcal{R}$ -rekursion med g .

Om $\mathcal{R}$ inte är välgrundad (vilket den normalt inte är), kan det hända att problemet saknar lösning eller har flera olika lösningar. Att knarrögåtor ofta har entydig lösning beror på att någon har konstruerat dem så, de får det inte automatiskt.

Exempel:

A, B och C bor alla på Knarrön. De säger,

- A:** ”C är kung om jag är det.”
B: ”A är kung.”
C: ”B är narr.”



Detta problem (dvs problemet att finna möjliga typer för A, B och C) saknar, som man kan förvissa sig om, lösning. Motsvarande $\mathcal{R}$ i figuren är heller inte välgrundad (det finns ju cykler, dels vid A och dels ACBA).

Om A i stället säger ”Jag är kung om C är det.” (och B och C detsamma som ovan), finns två olika lösningar (A, B ena sorten, C den andra) och om han säger ”C och jag är båda kungar.” finns en entydig lösning (A, B narrar, C kung).

Alla fallen kan alltså inträffa om $\mathcal{R}$ inte är välgrundad.

Ett enklare exempel som saknar lösning:

Exempel:

En knarröbo säger: "Jag är narr." Är hon kung eller narr?

Om hon vore kung skulle hennes utsaga vara falsk och hon vore inte kung.

Om hon vore narr skulle hennes utsaga vara sann och hon vore inte narr.

Ingendera är alltså möjligt, så **problemet saknar lösning**.

Det sista exemplet kan kallas knarröformuleringen av den klassiska **lögnarparadoxen**:

Är påståendet "**Detta påstående är falskt**" sant eller falskt?

Svårare(?) är den s.k. "starka lögnarparadoxen": "Detta påstående är inte sant (dvs det är antingen falskt eller ingendera)". Antagandet att det är sant ger motsägelse, så det är inte sant!?

Man kan tänka sig att skälet till att problemen ibland saknar lösningar är att det förekommer (direkt eller indirekt) **självreferens**, någon talar om sin egen status som kung eller narr (eller om någon som talar om någon som ... talar om den), så att hans utsaga blir sann precis om han är narr. För att det skall kunna hända måste $\mathcal{R}$ ovan ha cykler i sin figur och därför inte vara välgrundad.

Men cykler är inte enda möjligheten för en relation att vara icke-välgrundad. Man kan ju ha en oändlig bakåtgående kedja också. Det är grunden för den s.k. **Yablos paradox**, vilken publicerades så sent som 1993(!). I knarrötermer kan den formuleras så:

På Knarrön bor A_0, A_1, A_2 osv (oändligt många).

A_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) säger: " **$A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3}$, osv är alla narrar.**"

Här finns ingen lösning (inte så förvånande eftersom motsvarande relation $\mathcal{R}$ ges av att $j\mathcal{R}i$ är sann precis om $i < j$ och den är inte välgrundad), ty antag att A_n är kung, då skulle alla A_{n+1}, A_{n+2} , osv vara narrar, men det skulle göra A_{n+1} :s utsaga sann, motsägelse. Så A_n måste vara narr, för $n = 0, 1, 2, \dots$. Det skulle göra alla deras utsagor sanna, motsägelse igen (och nu utan antagande).

För den som inte känner till begreppet välgrundning kan detta verka paradoxalt. Här finns ju **ingen självreferens** och ändå **ingen lösning**.

Vi noterar att utsagorna i Yablos paradox inte svarar mot satslogiska sentenser (de har ju formen av konjunktioner av ett oändligt antal atomära sentenser). I själva verket finns det (som vi skall visa senare i kursen) alltid minst en lösning till knarrögåtor där varje person gör högst ett uttalande, det kan formuleras som en sentens i första ordningens predikatlogik och ingen självreferens förekommer.

Övningar

Kö1) A, B och C kommer från Knarrön.

A säger: "Om B är kung så är C narr."

B säger: "Om C är kung så är A narr."

C säger: "Exakt en av oss tre är kung."

Vad är A, B och C?

Kö2) Nära Knarrön ligger den lilla Gnisslön, vars invånare behandlar sanningen motsatt mot knarröborna – kungarna ljuger och narrarna talar sanning.

A, som är från Knarrön, säger: "B kommer från Gnisslön."

B, som är från en av öarna, säger: "Om jag kommer från Knarrön är A kung."

Är B kung eller narr?

Kö3) Knarröborna A och B, en man och en kvinna, är gifta med varandra.

Kvinnan säger: "Min man och A är samma sort."

Mannen lägger till: "Om min fru är kung är A narr."

Vem av dem är A och vem är B? Vilka sorter är de?

Kö4) Visa att det saknas lösning till knarröproblemet med öbor $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, då varje A_k säger: "Minst en av A_{k+1} , A_{k+2} , A_{k+3} , osv är narr."

Svar och anvisningar till övningarna

Vg1) Om det finns en sådan följd $\alpha_0, \alpha_1, \dots$, har mängden $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ inte något $\mathcal{R}$ -minimalt element (ty $\alpha_{i+1} \mathcal{R} \alpha_i$, alla $i = 0, 1, 2, \dots$), så $\mathcal{R}$ är **inte välgrundad**.

Om $\mathcal{R}$ inte är välgrundad finns $A \subseteq \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$ utan $\mathcal{R}$ -minimalt element. Tag $\alpha_0 \in A$. Eftersom α_0 inte är $\mathcal{R}$ -minimalt i A , finns $\alpha_1 \in A$ med $\alpha_1 \mathcal{R} \alpha_0$. Men inte heller α_1 är $\mathcal{R}$ -minimalt i A , så osv. Man kan rekursivt (i $\mathbb{N}$) välja elementen i följden $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ (element kan vara lika) med $\alpha_{i+1} \mathcal{R} \alpha_i$, **alla $i = 0, 1, 2, \dots$** .

Vg2) Låt $A \subseteq \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$.

Om $A_1 = A \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, har A_1 ett $\mathcal{R}_1$ -minimalt element $\alpha \in A_1$ (ty $\mathcal{R}_1$ välgrundad). α är också $\mathcal{R}$ -minimalt i A , ty om $\beta \mathcal{R} \alpha$, $\beta \in A$ gäller enligt förutsättningarna att $\beta \mathcal{R}_1 \alpha$, $\beta \in A_1$.

Om $A \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$, är $A \subseteq \mathcal{D}_2$, $A \neq \emptyset$, så ($\mathcal{R}_2$ välgrundad) det finns $\alpha \in A$ som är $\mathcal{R}_2$ -minimalt i A . α är då också $\mathcal{R}$ -minimalt i A , ty $\beta \mathcal{R} \alpha$, $\beta \in A \subseteq \mathcal{D}_2$ skulle medföra $\beta \mathcal{R}_2 \alpha$, $\beta \in A$.

I båda fallen har A ett $\mathcal{R}$ -minimalt element, så $\mathcal{R}$ är välgrundad.

Vg3) Låt $A \subseteq \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$.

Låt också $A_2 = \{\alpha_2 \in \mathcal{D}_2 \mid \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in A \text{ för något } \alpha_1 \in \mathcal{D}_1\}$. Då är $A_2 \neq \emptyset$ (ty $A \neq \emptyset$), så det finns ett $\mathcal{R}_2$ -minimalt element α_2^* i A_2 . Låt $A_1 = \{\alpha_1 \in \mathcal{D}_1 \mid \langle \alpha_1, \alpha_2^* \rangle \in A\}$. Då är $A_1 \subseteq \mathcal{D}_1$, $A_1 \neq \emptyset$, så det finns ett $\mathcal{R}_1$ -minimalt element α_1^* i A_1 . Då är (enligt förutsättningarna om $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$) $\langle \alpha_1^*, \alpha_2^* \rangle$ ett $\mathcal{R}$ -minimalt element i A . $\mathcal{R}$ är alltså välgrundad.

Vg4) Låt $\mathcal{D} = \{0, 1\}$, $\mathcal{R} = \{\langle 0, 1 \rangle\}$. Då har $A = \{1, 01, 001, 0001, \dots\} \subset \mathcal{D}^{<\omega}$ inget $\mathcal{R}_l$ -minimalt element (så $\mathcal{R}_l$ är icke-välgrundad för alla $\mathcal{R} \neq \emptyset$).

Svar och anvisningar till övningarna, forts.

Kö1) Om C är kung talar hon sanning, så A och B är båda narrar. Men då är B :s utsaga sann, motsägelse. Så C måste (om det finns någon lösning alls) vara narr och därmed talar A och B sanning och är kungar. (Vi ser att alla utsagorna "stämmer" med vad vi fått fram, så det är en lösning.)

Svar: A och B är kungar, C är narr.

Alt. alla $A \leftrightarrow (B \rightarrow \neg C)$, $B \leftrightarrow (C \rightarrow \neg A)$, $C \leftrightarrow$ (exakt en kung) ska vara sanna. Sanningsvärdestabeller. (Tabellen kan ställas upp utan att uttrycka "exakt en kung" som en sentens.)

Kö2) Om A är kung (från Knarrön, ju) är det han säger sant, så B kommer från Gnisslön. B :s påstående är i detta fall sant (A är kung), så hon är då **narr**.

Om A är narr (fortfarande från Knarrön) ljugar han, så B kommer från Knarrön. Eftersom B :s påstående i detta fall är falskt (B från Knarrön, A narr) är hon också i det fallet **narr**.

Svar: B är narr.

Alt. om K betyder att B är från Knarrön, får vi med t.ex. sanningsvärdestabell att $A \leftrightarrow \neg K$ och $(B \leftrightarrow K) \leftrightarrow (K \rightarrow A)$ båda är sanna bara om $\neg B$ är det.

(Man kan inte avgöra om A är kung (och B från Gnisslön) eller narr (och B från Knarrön).)

Kö3) Om kvinnan är A , säger hon att A och B är samma sort. Det innebär att B (mannen) är kung (oberoende av om hon är kung eller narr).

Om kvinnan är B säger hon att A och A är samma sort, så hon, B , är kung.

B är alltså kung (oberoende av vem som är vem av A och B).

Om mannen är A , är hans fru (B) kung, så hans utsaga innebär att han själv är narr. Motsägelse (ingen kan säga sig vara narr), så mannen är B , en kung.

B säger alltså (sanningsenligt) att om A (frun) är kung är hon narr. Så A är narr.

Svar: Kvinnan är A och narr, mannen är B och kung.

Alt. om fru A , herr B : $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$, $B \leftrightarrow (A \rightarrow \neg A)$, annars: $B \leftrightarrow (A \leftrightarrow A)$, $A \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$.

Kö4) Antag att A_n är narr. Då måste alla A_{n+1} , A_{n+2} , osv vara kungar, men det skulle göra A_{n+1} :s utsaga falsk, motsägelse. Så A_n måste vara kung, för $n = 0, 1, 2, \dots$. Det skulle göra alla deras utsagor falska, motsägelse (utan antagande).