

Om semantisk följd och bevis

Logik handlar bl.a. om studiet av korrekta slutledningar, dvs frågan om när det är riktigt att dra en slutsats utgående från givna premisser.

Exempel: Följande slutledning är uppenbarligen riktig

- (1) Sokrates är en människa.
- (2) Alla människor är dödliga.
- (3) $\therefore$ Sokrates är dödlig. (‘ $\therefore$ ’ kan här utläsas ”således”)

Men följande är **inte** riktig

- (1) Sokrates är dödlig.
- (2) Alla människor är dödliga.
- (3) $\therefore$ Sokrates är en människa.

(Sokrates kan mycket väl vara en människa, men det följer inte av de givna premisserna (1) och (2).)

För oss är det viktigaste exemplet på slutledning förstås matematiska bevis.

1. Semantisk följd, $\Gamma \models \varphi$ (även kallat logisk följd)

Vi kan beskriva att en slutledning (mellan sentenser i ett givet språk $\mathcal{L}$) är riktig med hjälp av strukturer och modeller.

Definition 1.1 (semantisk följd, $\models$):

Om $\Gamma \cup \{\varphi\}$ är en mängd $\mathcal{L}$ -sentenser, är φ **en semantisk följd av Γ** ,
 $\Gamma \models \varphi$ om och endast om $\mathcal{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$ för alla $\mathcal{L}$ -strukturer $\mathcal{A}$.

Det betyder att det är korrekt att dra slutsatsen att φ är sann från informationen att alla sentenser i Γ är sanna (oberoende av aktuell tolkning (dvs $\mathcal{A}$)).
 $\models$ kan ses som en formell semantisk motsvarighet till (en användning av) $\Rightarrow$.

2. Formellt bevis, $\Gamma \vdash \varphi$ (även kallat härledning)

Ett formellt bevis ser, i motsats till semantisk följd (som handlar om betydelse och vad som är sant och falskt), bara på sentensernas form, syntaxen.

Definition 2.1 (formellt bevis, $\vdash$):

Om $\Gamma \cup \{\varphi\}$ är en mängd $\mathcal{L}$ -sentenser, kan φ **bevisas från premisserna Γ** , $\Gamma \vdash \varphi$ omm det finns en härledning av φ från Γ (i ett formellt system).

Vi behandlar här kort härledningssystemet **naturlig deduktion**. Dess regler finns på de sista sidorna nedan.

I huvudsak finns två regler för varje konnektiv och kvantifikator (liksom likhets-tecknet), en "E-regel" (för att "eliminera" en förekomst av konnektivet etc.) och en "I-regel" (för att "introducera" det). Dessutom krävs en regel som tillåter oss att göra **antaganden** på vägen och en regel som låter oss dra slutsatsen p om vi har $\neg\neg p$.

Reglerna skall tolkas så att den sista raden kan skrivas upp med åberopande av regeln i fråga om raderna över redan finns (i någon ordning) bland raderna i vår härledning. $p, q, \dots$ kan vara godtyckliga sentenser och $g, h, \dots, a_1, \dots, b_1, \dots$ godtyckliga radnummer.

Vi ser på några exempel.

Ex. För att visa att $A \rightarrow B$, $A \vdash B$ skriver vi (skrivs oftast utan $\{$ och $\}$ i VL)

1	(1)	$A \rightarrow B$	premiss
2	(2)	A	premiss
1,2	(3)	B	1,2 $\rightarrow E$

På de två första raderna står **premisserna**, de sentenser som står till vänster om $\vdash$ -symbolen, och den tredje raden innehåller vår önskade slutsats, som i det här fallet ficks med bara en regelanvändning.

Den andra kolumnen är en numrering av raderna, för att vi skall kunna hänvisa till dem. I den första kolumnen står numren för de rader vi behövt för att härleda radens sentens (som finns i kolumn tre). Som framgår av reglerna kan det i första kolumnen bara stå radnummer för premisser och antaganden (det finns inga regler som placerar andra nummer där). Den tredje raden ovan betyder alltså att B kan härledas (eller har härletts) ur sentenserna (premisserna) på raderna 1 och 2. De två sista kolumnerna talar om vilken regel vi åberopar för att skriva upp sentensen på raden, precis som det står formulerat i reglerna.

Ex. Vi visar att $A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow \neg A$

1	(1)	$A \rightarrow \neg B$	premiss
2	(2)	B	antagande (för $\rightarrow I$)
3	(3)	A	antagande (för $\neg I$)
1,3	(4)	$\neg B$	1,3 $\rightarrow E$
1,2,3	(5)	$\perp$	4,2 $\neg E$
1,2	(6)	$\neg A$	3,5 $\neg I$
1	(7)	$B \rightarrow \neg A$	2,6 $\rightarrow I$

Eftersom slutsatsen på rad 7 bara beror av premissen på rad 1, är saken klar. Observera att de antaganden vi gör (enligt sin regel, förstås) är precis som när vi resonerar informellt. Slutsatsen på sista raden får inte bero av antaganden,

de ”tas bort” av vissa regler (här står som förklaring t.ex. ”(för $\rightarrow$ I)” vid ett antagande; det hör egentligen inte till, utan är bara för att informellt förklara varför vi gjort antagandet). I t.ex. $\rightarrow$ I-regeln står vid sista raden (1) att den beror av $\{a_1, \dots, a_n\}/j$. Det betyder att antagandet på rad j skall tas bort från $\{a_1, \dots, a_n\}$ (om det finns med).

$\perp$ på rad 5 är, som vi sett förr, en sentens som alltid är falsk, en motsägelse, kallad **falsum**. Här har vi härlett $\perp$ från raderna 1, 2 och 3 (A), vilket enligt principen för ett motsägelsebevis ju betyder att 1 och 2 leder till 6 ($\neg A$), negationen till antagandet 3 (dessutom leder 1 och 3 till negationen av 2, $\neg B$, men det behöver vi inte här). På liknande sätt följer av att 1 och 2 (B) leder till 6 ($\neg A$) att 1 leder till 7 ($B \rightarrow \neg A$).

Rader som står åtskilda i en regel kan vara identiska (regeln skall alltså tolkas som att var och en av dess rader över den sista måste finnas bland våra redan härledda), t.ex. kan vi visa att det alltid gäller att A medför A så:

Ex. Vi visar $\vdash A \rightarrow A$

- | | | | |
|---|-----|-------------------|---------------------|
| 1 | (1) | A | antagande |
| | (2) | $A \rightarrow A$ | 1,1 $\rightarrow$ I |

Slutsatsen på rad 2 beror inte av något, så härledningen är klar. En sentens p som kan härledas från ingenting, $\vdash p$, brukar kallas ett **teorem**. Den samantiska motsvarigheten $\models p$, att p är sann i alla tolkningar, är att p är en **tautologi**.

Andra exempel på teorem/tautologier är

$$A \vee \neg A, A \rightarrow (B \rightarrow A) \text{ och } (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A.$$

Bland reglerna finns också sådana som bara används i predikatlogik (regler för $\forall$, $\exists$ och $=$). Flera av dem innehåller olika villkor, som t.ex. att för att man ur Pa skall kunna dra slutsatsen $\forall x Px$ måste a vara ett namn som inte förekommer på angivna rader i härledningen. Det svarar mot att man för att visa att något gäller för alla tal, måste visa det för ett ”godtyckligt” tal – det räcker inte att visa det för π , 0 eller $\sqrt{7}$.

$\exists$ E-regeln är nog den mest subtila. Det kan vara något att fundera över varför villkoren i den ser ut som de gör och varför den precis motsvarar vårt sätt att resonera då vi använder $\exists x Px$. Man kan jämföra med $\forall$ E-regeln, som också den kan tåla lite eftertanke.

För att illustrera kvantifikatorreglerna ger vi ett sista

Ex. Vi visar att $\exists x \forall y Qxy \vdash \forall y \exists x Qxy$ (t.ex. ”om det finns ett största tal, så finns det för varje tal ett tal som är $\geq$ det”)

- | | | | |
|---|-----|---------------------------|---|
| 1 | (1) | $\exists x \forall y Qxy$ | premiss |
| 2 | (2) | $\forall y Qay$ | antagande |
| 2 | (3) | Qab | 2 $\forall$ E |
| 2 | (4) | $\exists x Qxb$ | 2 $\exists$ I |
| 1 | (5) | $\exists x Qxb$ | 1,2,4 $\exists$ E (a finns inte på raderna 1, 4) |
| 1 | (6) | $\forall y \exists x Qxy$ | 5 $\forall$ I (b finns inte på rad 1) |

Observera att det omvända inte gäller, $\forall y \exists x Qxy \not\vdash \exists x \forall y Qxy$. Tänk på $\mathbb{N}$ med $\geq$ som Q . Varför skulle ett liknande bevis för det inte fungera?

3. Gödels fullständighetssats

Det viktiga sambandet mellan $\models$ och $\vdash$ ges (för första ordningens predikatlogik) av

Sats 3.1 (Gödels fullständighetssats):

För alla Γ , φ ($\Gamma \cup \{\varphi\}$ en mängd $\mathcal{L}$ -sentenser) gäller $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

Ty: (idé) $\Leftarrow$: (sundhet, det som kan bevisas är sant)

Induktion över härledningens längd. Man visar att varje regel bevarar egenskapen hos härledningen att om en rad är $a_1, \dots, a_n$ (j) ψ , så är det sant att $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$ (där φ_i står på rad a_i).

$\Rightarrow$: (fullständighet, det som är sant kan bevisas)

Eftersom $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \perp$ ($\Delta \models \perp$ betyder precis att Δ saknar modell) och $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ ($\Rightarrow$: $\neg E$, $\Leftarrow$: $\neg I$, DN),

räcker det att visa att $\Delta \not\models \perp \Rightarrow \Delta \not\vdash \perp$ för varje $\mathcal{L}$ -sentensmängd Δ ("modellexistenslemmat", om Δ är konsistent ($\Delta \not\models \perp$) har Δ en modell).

För varje formel φ_i med bara x fri, lägg till en ny konstant c_i och bilda $\Delta_1 = \Delta \cup \{\exists x \varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i(c_i) \mid \text{alla } i\}$.

Upprepa med Δ_1 i stället för Δ , få Δ_2 etc.

Låt $\Delta' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ och utvidga till en maximal, konsistent mängd $\Delta^* \supseteq \Delta'$. Då gäller för alla $\mathcal{L}$ -formler φ_i med bara x fri att $\exists x \varphi_i(x) \in \Delta^* \Rightarrow \varphi_i(c_i) \in \Delta^*$ och för alla $\mathcal{L}$ -sentenser φ precis en av $\varphi \in \Delta^*$ och $\neg\varphi \in \Delta^*$ (annars $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \perp$, så $\Delta \vdash \neg\varphi$ ($\neg I$), och $\Delta \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$, tillsammans $\Delta \vdash \perp$).

Man får en $\mathcal{L}$ -struktur $\mathfrak{A}$ med $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Delta^*$ för alla $\mathcal{L}$ -sentenser φ (så $\mathfrak{A}$ är en modell för Δ), genom att låta domänen bestå av ekvivalensklasser av slutna $\mathcal{L}$ -termer ($\mathcal{L}$ -termer utan variabler) med ekvivalensrelationen $t_1 \sim t_2$ given av $t_1 = t_2 \in \Delta^*$. $f \in \mathcal{L}$ tolkas enligt $f^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$ och $\mathfrak{A} \models R([t_1], \dots, [t_n])$ omm $Rt_1 \dots t_n \in \Delta^*$.

Detaljer återstår uppenbarligen. □

Satsen innebär att allt som kan härledas från Γ är sant i alla modeller för Γ (sundhet) och att allt som är sant i alla modeller för Γ kan härledas från Γ (fullständighet).

Det innebär dock **inte** att man för givna Γ , φ alltid kan avgöra (med en algoritm) om $\Gamma \models \varphi$. Första ordningens predikatlogik är **inte algoritmiskt avgörbar**, men den är **effektivt uppräknelig** (dvs man kan (i princip) räkna upp alla φ som följer av Γ – gå systematiskt igenom alla härledningar – men om φ inte dykt upp än kan det bero på att $\Gamma \models \varphi$, men φ kommer senare, eller på att $\Gamma \not\models \varphi$).

4. Gödels ofullständighetssats

Att Gödel har både en fullständighetssats och en ofullständighetssats uppkallad efter sig är möjligt eftersom de handlar om "fullständighet" i två olika betydelser.

Sats 4.1 (Gödels (första) ofullständighetssats):

Det finns ingen fullständig, konsistent, axiomatiserbar utvidgning till Peanos axiom. Speciellt kan $\text{Th}(\mathbb{N}, \mathcal{L}_{\text{Peano}})$ inte axiomatiseras.

(Satsen gäller också om induktionsaxiomen byts mot $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y x = S(y))$, det s.k. Q -axiomet.)

Här betyder att en $\mathcal{L}$ -teori (dvs en $\mathcal{L}$ -sentensmängd) T är **fullständig** att för varje $\mathcal{L}$ -sentens φ gäller $T \vdash \varphi$ eller $T \vdash \neg\varphi$, att T är **konsistent** att $T \not\vdash \perp$ och att den är **axiomatiserbar** att det finns en **avgörbar** mängd $\mathcal{A}$ (dvs givet en $\mathcal{L}$ -sentens φ skall vi algoritmiskt kunna avgöra om $\varphi \in \mathcal{A}$) av $\mathcal{L}$ -sentenser (axiom) sådan att $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$. Utan villkoret om avgörbarhet hade $\mathcal{A} = T = \text{Th}(\mathbb{N}, \mathcal{L}_{\text{Peano}})$ varit ett motexempel till satsen (T fullständig, ty $(\mathbb{N}, \mathcal{L}_{\text{Peano}}) \models \varphi$ eller $\models \neg\varphi$ för varje $\mathcal{L}_{\text{Peano}}$ -sentens, konsistent eftersom den har modellen $(\mathbb{N}, \mathcal{L}_{\text{Peano}})$, så $T \not\vdash \perp \Rightarrow T \not\vdash \perp$).

Detta sågs som sensationellt (eller katastrofalt) när det upptäcktes. Det innebär att vi inte kan konstruera en (ändlig eller oändlig) mängd axiom som har precis de $\mathcal{L}_{\text{Peano}}$ -sentenser som är sanna i $\mathbb{N}$ som följer.

Vi bevisar inte sats 4.1, men skissar huvuddragen i ett bevis.

Idé: Finn (för ett konsistent axiomsystem $\mathcal{A}$ som utvidgar Peanos axiom (eller Q -axiomen)) en sentens φ som "säger" att $\mathcal{A} \not\vdash \varphi$.

- φ kan inte bevisas (den vore då sann, motsägelse),
- $\neg\varphi$ kan inte bevisas (då skulle φ kunna bevisas, motsäger $\mathcal{A}$ s konsistens),

så $\mathcal{A}$ är inte fullständigt.

Men? En sentens "säger" inget om bevisbarhet, den är sann eller falsk, beroende på vilken struktur vi betraktar! För att förklara hur en sentens i aritmetikens språk kan "säga" något om bevisbarhet och att en sådan sentens φ finns, visas tre saker:

- (1) (vissa) funktioner $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ kan **representeras** av $\mathcal{L}_{\text{Peano}}$ -formler
- (2) syntaxen (inklusive bevisbarhet) kan formuleras som sådana funktioner i $\mathbb{N}$
- (3) en sådan sentens φ finns ("diagonallemmat")

1. Representerbara funktioner och relationer:

Låt $\mathcal{A}$ vara axiom för en utvidgning av Peanos axiom (eller Q -axiomen).

Funktionen $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ sägs vara **representerbar i $\mathcal{A}$** om det finns en formel $A(x_1, \dots, x_k, x)$ sådan att för alla $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ ($\vdash_{\mathcal{A}}$ står för $\mathcal{A} \vdash$):

$$f(m_1, \dots, m_k) = n \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \forall x (A(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, x) \Leftrightarrow x = \underline{n})$$

(Om $m \in \mathbb{N}$ betecknar $\underline{m}$ termen $S(S(\dots S(0)\dots))$ (med m st S).)

De representerbara funktionerna är precis de **rekursiva funktionerna**, dvs (troligen, detta är den obevisade (och obevisbara) "Churchs tes") alla de funktioner som kan beskrivas med algoritmer.

Relationen $Rm_1 \dots m_k$ på $\mathbb{N}^k$ sägs vara representerbar i $\mathcal{A}$ om det finns en formel $B(x_1, \dots, x_k)$ sådan att

$$\begin{aligned} Rm_1 \dots m_k \text{ sann} &\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} B(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}), \\ Rm_1 \dots m_k \text{ falsk} &\Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \neg B(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}). \end{aligned}$$

2. Gödelnumrering: en injektion

$$\text{gn}: \{ \text{alla } \mathcal{L}_{\text{Peano}}\text{-strängar} \} \hookrightarrow \mathbb{N},$$

dess exakta form är inte viktig (här) (men ger rekursiva funktioner nedan).

Låt $\ulcorner \phi \urcorner$ vara $\text{gn}(\phi)$, dvs termen $S(S(\dots S(0)\dots))$ ($\text{gn}(\phi)$ stycken S).

Syntaxen svarar då mot rekursiva funktioner på $\mathbb{N}$, t.ex. $\text{con}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ som uppfyller $\text{con}(\text{gn}(\phi), \text{gn}(\psi)) = \text{gn}(\phi \wedge \psi)$. Man säger att syntaxen har **aritmetiserats**.

Relationen $\text{Bev } mn$ på $\mathbb{N}^2$, som är sann precis om $m = \text{gn}(\varphi_1 \dots \varphi)$ och $n = \text{gn}(\varphi)$, där φ är en sentens och $\varphi_1 \dots \varphi$ är ett bevis för φ (med $\mathcal{A}$), representeras av formeln $\text{Prov}(x, y)$.

Då "säger" formeln $\text{Pr}(y): \exists x \text{Prov}(x, y)$ att **sentensen med gödeltal y kan bevisas**.

Med beteckningen $\Box \varphi$ för $\text{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ gäller

$$\vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$$

och de tre viktiga (som uttrycker att $\Box$ är ett "bevisbarhetspredikat")

$$\text{D1} \quad \vdash_{\mathcal{A}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi$$

$$\text{D2} \quad \vdash_{\mathcal{A}} \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$$

$$\text{D3} \quad \vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$$

(D1 och D2 ger också D4 $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi \rightarrow \Box \psi$.)

3. Diagonaliseringslemmat:

Om $\psi(x)$ är en formel utan andra fria variabler än x , finns en sentens φ med

$$\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

(ty: låt en rekursiv(!) funktion $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ med $d(\text{gn}(\phi)) = \text{gn}(\exists x (x = \ulcorner \phi \urcorner \wedge \phi))$ (för varje $\mathcal{L}$ -formel ϕ) representeras av $\delta(x, y)$, χ vara $\mathcal{L}$ -formeln $\exists y (\delta(x, y) \wedge \psi(y))$ och φ vara $\exists x (x = \ulcorner \chi \urcorner \wedge \chi)$. Då $\vdash_{\mathcal{A}} \forall y (\delta(\ulcorner \chi \urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner \varphi \urcorner)$ ($\delta(x, y)$ representerar d) så $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \leftrightarrow \chi(\ulcorner \chi \urcorner)$ ger $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \leftrightarrow \exists y (y = \ulcorner \varphi \urcorner \wedge \psi(y))$ och $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$.)

Detta lemma är den kritiska observationen. Låt nämligen sentensen φ vara sådan att $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \leftrightarrow \neg \Box \varphi$ (lemmat tillämpat med $\neg \text{Pr}$ som ψ). φ "säger" alltså just att φ inte kan bevisas.

Då fås dels

$$\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \xRightarrow{\text{D1}} \vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi \xRightarrow{\text{def av } \varphi} \vdash_{\mathcal{A}} \neg \varphi, \text{ så } \vdash_{\mathcal{A}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \perp$$

och dels

$$\vdash_{\mathcal{A}} \neg \varphi \xRightarrow{\text{def av } \varphi} \vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi \xRightarrow{\Box\text{-s betydelse}} \vdash_{\mathcal{A}} \varphi, \text{ så } \vdash_{\mathcal{A}} \neg \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \perp$$

Det innebär att varken φ eller $\neg \varphi$ kan bevisas i en konsistent, axiomatiserbar utvidgning av T_Q !

Man kan också visa att

$$\not\vdash_{\mathcal{A}} \perp \Rightarrow \not\vdash_{\mathcal{A}} \neg \Box \perp,$$

dvs om $\mathcal{A}$ är konsistent kan detta inte bevisas i $\mathcal{A}$ (om $\mathcal{A}$ **inte** är konsistent kan dess konsistens (liksom allt annat) förstås bevisas i $\mathcal{A}$!). Detta är **Gödels andra ofullständighetssats**.

Men hur blir det om man låter φ (enligt lemmat) uppfylla $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi \leftrightarrow \Box \varphi$, dvs φ "säger" att φ själv är bevisbar? $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi$? $\vdash_{\mathcal{A}} \neg \varphi$? Ingendera? Vilken som?

Löbs sats: $\vdash_{\mathcal{A}} \Box \varphi \rightarrow \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$

ger att det är det första som gäller, $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi$!

Härledningsregler för naturlig deduktion (2 sidor)

Regel för premiss

$$j \quad (j) \quad p \quad \text{premiss}$$

Regel för antagande

$$j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande}$$

Regel för $\wedge$ E:

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad p \wedge q \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \wedge E \\ \quad \quad \quad \text{(eller } q) \end{array}$$

Regel för $\rightarrow$ E:

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \rightarrow q \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad q \quad j, k \quad \rightarrow E \end{array}$$

Regel för $\neg$ E:

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad \neg p \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad \perp \quad j, k \quad \neg E \end{array}$$

Regel för $\vee$ E:

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_m \quad (g) \quad p \vee q \\ \vdots \\ h \quad (h) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (i) \quad r \\ \vdots \\ j \quad (j) \quad q \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ c_1, \dots, c_u \quad (k) \quad r \\ \vdots \\ X \quad (l) \quad r \quad g, h, i, j, k \quad \vee E \end{array}$$

där $X =$

$= \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\} / h \cup \{c_1, \dots, c_u\} / j$

DN-regeln

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \neg \neg p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \text{DN} \end{array}$$

Regel för $\wedge$ I:

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad q \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad p \wedge q \quad j, k \quad \wedge I \end{array}$$

Regel för $\rightarrow$ I:

$$\begin{array}{l} j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad q \\ \vdots \\ \{a_1, \dots, a_n\} / j \quad (l) \quad p \rightarrow q \quad j, k \quad \rightarrow I \end{array}$$

Regel för $\neg$ I:

$$\begin{array}{l} j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \perp \\ \vdots \\ \{a_1, \dots, a_n\} / j \quad (l) \quad \neg p \quad j, k \quad \neg I \end{array}$$

Regel för $\vee$ I:

$$\begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \vee q \quad j \quad \vee I \\ \quad \quad \quad \text{(eller } q \vee p) \end{array}$$

Regel för $\leftrightarrow$ E:

$$\begin{array}{c}
a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \leftrightarrow q \\
\text{(eller } a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad q \leftrightarrow p) \\
\vdots \\
b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\
\vdots \\
a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad q \quad j, k \quad \leftrightarrow E
\end{array}$$

Regel för $\forall$ E:

$$\begin{array}{c}
a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \forall \nu \phi \nu \\
\vdots \\
a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \phi t \quad j \quad \forall E \\
\phi t \text{ är } \phi \nu \text{ med } \mathbf{alla} \nu \text{ ersatta med } t
\end{array}$$

Regel för $\exists$ E:

$$\begin{array}{c}
a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad \exists \nu \phi \nu \\
\vdots \\
k \quad (k) \quad \phi t \quad \text{antagande} \\
\vdots \\
b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad \psi \\
\vdots \\
X \quad (m) \quad \psi \quad j, k, l \quad \exists E \\
\text{där } X = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}/k \\
\phi t \text{ är } \phi \nu \text{ med } \mathbf{alla} \nu \text{ ersatta med } t \\
\text{namnet } t \text{ förekommer inte på} \\
\text{någon av raderna } j, l, \{b_1, \dots, b_n\}/k
\end{array}$$

Regel för $=$ E:

$$\begin{array}{c}
a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad t_1 = t_2 \\
\vdots \\
b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad \phi t_1 \\
\vdots \\
a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad \phi t_2 \quad j, k \quad =E \\
\phi t_2 \text{ är } \phi t_1 \text{ med } \mathbf{godtyckligt antal} t_1 \text{ ersatta} \\
\text{med } t_2
\end{array}$$

Regel för $\leftrightarrow$ I:

$$\begin{array}{c}
g \quad (g) \quad p \quad \text{antagande} \\
\vdots \\
a_1, \dots, a_m \quad (h) \quad q \\
\vdots \\
j \quad (j) \quad q \quad \text{antagande} \\
\vdots \\
b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\
\vdots \\
X \quad (l) \quad p \leftrightarrow q \quad g, h, j, k \quad \leftrightarrow I \\
\text{där } X = \{a_1, \dots, a_m\}/g \cup \{b_1, \dots, b_n\}/j
\end{array}$$

Regel för $\forall$ I:

$$\begin{array}{c}
a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \phi t \\
\vdots \\
a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \forall \nu \phi \nu \quad j \quad \forall I \\
\text{där } t \text{ inte finns på rad } a_1, \dots, a_n \\
\phi \nu \text{ är } \phi t \text{ med } \mathbf{alla} t \text{ ersatta med } \nu \\
\text{variabeln } \nu \text{ finns inte i } \phi t
\end{array}$$

Regel för $\exists$ I:

$$\begin{array}{c}
a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \phi t \\
\vdots \\
a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \exists \nu \phi \nu \quad j \quad \exists I \\
\phi \nu \text{ är } \phi t \text{ med ett } \mathbf{godtyckligt antal} t \\
\text{ersatta med } \nu
\end{array}$$

Regel för $=$ I:

$$(j) \quad t = t \quad =I$$