

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen

SF1679, DISKRET MATEMATIK för F3

torsdagen den 11 januari 2018, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Betygsgränser:

För	A	B	C	D	E	Fx	
krävs	32	27	22	18	15	13	poäng

Fx är inte ett betyg, men ger rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I Poängen på denna del är den minsta av 15 och summan av poängen för uppgifterna 1–5 och bonuspoängen för inlämningsuppgifterna ht17 (högst 4p).

1) (3p) För hur många $x \in \mathbb{Z}_{4851}$ är $x^{292} = 196$? [$4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$]

2) (3p) Låt X vara en ändlig mängd och $f: X \rightarrow X$ en bijektion.

Avgör om den binära relationen $\mathcal{R}$ på X som definieras av att, för alla $x, y \in X$:

$$x\mathcal{R}y \stackrel{\text{def}}{\iff} y = f^n(x) \text{ (dvs } y = f(f(\dots f(x)\dots)) \text{ (} n \text{ st 'f')) för något } n \in \mathbb{Z}_+$$

är en ekvivalensrelation (för alla sådana f, X).

Det skall tydligt framgå av lösningen vilka villkoren är för att en relation skall vara en ekvivalensrelation och vilka av dem som säkert är uppfyllda för $\mathcal{R}$.

3a) (2p) Låt $A = \mathbb{N}_7 = \{1, 2, \dots, 7\}$ och $B = \mathbb{N}_{13} = \{1, 2, \dots, 13\}$.

Hur många funktioner $f: A \rightarrow B$ antar precis 4 olika värden?

b) (1p) Hur många av funktionerna i uppgift a) antar minst ett udda värde?

Svaren får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) (3p) Låt $(G, \cdot)$ vara en grupp och $\varphi: G \rightarrow G$ ges av $\varphi(g) = g^{-1}$, alla $g \in G$.

Visa att φ är en isomorfi (en s.k. automorfi) om och endast om G är abelsk.

5) Permutationerna $\pi, \sigma \in S_{13}$ ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\pi(i)$	9	8	12	7	2	6	11	4	1	13	5	3	10
$\sigma(i)$	11	2	12	3	5	1	4	8	13	9	6	7	10

a) (1p) Finn π :s och σ :s pariteter (jämn eller udda).

b) (2p) För vilka $n \in \mathbb{Z}$ finns $\tau \in S_{13}$ med $\tau\pi^n = \sigma^n\tau$?

Vänd!

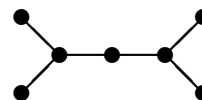
DEL II

6) (4p) $G = (V, E)$ är en plan, sammanhängande graf med alla valenser (eng. degrees) större än 2 (dvs $\delta(x) \geq 3$ för alla $x \in V$) och antalet hörn (eng. vertices) i den duala grafen $G^\perp = (V^\perp, E^\perp)$ är mindre än 12 (dvs $|V^\perp| \leq 11$).

Visa att minst ett hörn i $G^\perp$ har valens mindre än 5 (dvs $\delta^\perp(x) \leq 4$ för något $x \in V^\perp$). (En eventuell ögla (eng. loop) bidrar med 2 till sitt hörns valens.)

7) (4p) Sju pärlor är förbundna med trådar som i figuren.

På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider och vänder en del av eller hela anordningen i rummet) kan man färga precis två pärlor röda och var och en av de övriga med någon av k andra färger?



8) (4p) Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande graf.

Visa att G 's kanter kan riktas så att högst ett hörn (eng. vertex) x har udda utvalens $\delta^+(x)$ (dvs högst ett $x \in V$ har ett udda antal av sina kanter riktade bort från x).

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) Låt (som vanligt) fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definieras av att $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Finn värdet av

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot F_n.$$

För full poäng krävs att man visar att serien är konvergent (dvs (eftersom alla termer är ≥ 0) att det finns $B \in \mathbb{R}$ sådant att $\sum_{n=0}^N 2^{-n} \cdot F_n < B$ för alla $N \in \mathbb{N}$).

10a) (1p) Visa att om $x, y \in \mathbb{Z}$ och $y^3 = x^2 + 2$, så är x udda.

b) (2p) Visa att $(R, +, \cdot)$, där $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}i] = \{a + b\sqrt{2}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, har entydig faktorisering i "primtal" (bortsett från ordningen mellan faktorerna och faktorer ± 1).

(Du behöver inte ge detaljerna i hela beviset, men visa det som krävs och förklara hur det används för att resonera som i beviset för (väsentligen) entydig faktorisering i $\mathbb{Z}$.)

c) (2p) Finn alla $x, y \in \mathbb{Z}$ med $y^3 = x^2 + 2$.

(Det är tillåtet att utnyttja resultat i tidigare deluppgifter, även om man inte gjort dem.)

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.