

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen
SF1679, DISKRET MATEMATIK för F3
torsdagen den 5 april 2018, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Betygsgränser:

För	A	B	C	D	E	Fx
krävs	32	27	22	18	15	13
						poäng

Fx är inte ett betyg, men ger rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I Poängen på denna del är den minsta av 15 och summan av poängen för uppgifterna 1–5 och bonuspoängen för inlämningsuppgifterna ht17 (högst 4p).

1) (3p) Finn alla heltal x som uppfyller $[3599 = 59 \cdot 61]$

$$x^{1682} + 22x \equiv 1652 \pmod{3599}.$$

2) För mängder X, Y och $f: X \rightarrow Y$, låt $f^{\circ}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ges av

$$f^{\circ}(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \text{ för alla } A \in \mathcal{P}(X) \text{ (ibland betecknat } f[A]).$$

Avgör för följande par av mängder vilka av $'=$ ', $'\subseteq$ ', $'\supseteq$ ' som måste gälla (dvs gäller för alla sådana X, Y, f och $A, B \subseteq X$) mellan dem, i den ordning de står:

a) (1p) $f^{\circ}(A \cup B)$ och $f^{\circ}(A) \cup f^{\circ}(B)$,

b) (1p) $f^{\circ}(A \cap B)$ och $f^{\circ}(A) \cap f^{\circ}(B)$,

c) (1p) $f^{\circ}(A \setminus B)$ och $f^{\circ}(A) \setminus f^{\circ}(B)$.

(Beteckningar (som vanligt): $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$, $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.)

3) (3p) På hur många sätt kan fyra flickor och fem pojkar sitta på tre röda och sex vita stolar, en på varje stol, så att minst en flicka sitter på en röd stol? Både barn och stolar är särskiljbara.

Svaret får innehålla heltal, fakulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) Permutationerna $\pi, \sigma \in S_9$ ges av

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi(i)$	2	3	1	5	6	7	4	9	8
$\sigma(i)$	4	8	1	9	2	3	7	5	6

tabellen till höger.

a) (1p) Ge π , σ och $\pi\sigma$ på cykelform.

b) (2p) Låt G vara en delgrupp till S_9 som innehåller π och σ .

Visa att $|G|$, antalet element i G , är delbart med 180.

5) Ett RSA-system för kryptering har de offentliga parametrarna (n, e) där $n = 4331 [= 61 \cdot 71]$.

a) (1p) Vilket/vilka av 205, 206, 207, 208 och 209 är möjliga värden för e ?

b) (2p) Finn ett motsvarande d -värde för ett möjligt e från uppgift a.

Vänd!

DEL II

6) (4p) Låt G, G_1, G_2 vara grafer, där $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$ ($i = 1, 2$). Om $P_G(\lambda)$, $P_{G_i}(\lambda)$ är G 's och G_i 's kromatiska polynom (dvs, för $\lambda \in \mathbb{N}$, antalet hörnfärgningar av G, G_i med högst λ färger), visa att för $\lambda \in \mathbb{N}$ gäller

$$P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda).$$

7) Låt X vara en oändlig mängd och G mängden av bijektioner av X på X , $G = \{f: X \rightarrow X\}$.

- a) (1p) Visa att $(G, \circ)$ är en grupp (då $\circ$ är sammansättning av funktioner).
b) (2p) Visa att $H = \{f \in G \mid |\{x \in X \mid f(x) \neq x\}| < \infty\}$ är en delgrupp till G .
c) (1p) Är H en normal delgrupp till G (dvs är $fH = Hf$ för alla $f \in G$)?

8) (4p) Låt $G = (V, E)$ vara en graf och $\mu(x)$ för $x \in V$ vara medelvärde av x 's grannars valenser (eng. degrees) ($\mu(x) = 0$ om valensen $\delta(x) = 0$).

Visa att

$$\sum_{x \in V} \mu(x) \geq \sum_{x \in V} \delta(x).$$

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Låt $F[[x]]$ (som i Biggs bok) vara mängden av formella potensserier med koefficienter i kroppen F . Vi skriver $A(x) = \sum a_n x^n$ för $A(x) \in F[[x]]$ med $a_n \in F$ (så $\sum$ står för $\sum_{n=0}^\infty$). Definiera $D: F[[x]] \rightarrow F[[x]]$ (formell derivering) enligt

$$D(A(x)) = \sum n a_n x^{n-1} \text{ då } A(x) = \sum a_n x^n \in F[[x]].$$

a) (1p) Visa att för alla $A(x), B(x) \in F[[x]]$ är

$$D(A(x)B(x)) = D(A(x))B(x) + A(x)D(B(x)).$$

b) (2p) Låt $E(x) = \sum \frac{1}{n!} x^n \in \mathbb{R}[[x]]$ och låt $p_n(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ för $n \in \mathbb{N}$ ges av $p_0(x) = 1$ och $p_{n+1}(x)E(x) = x D(p_n(x)E(x))$ för $n \in \mathbb{N}$.

Uttryck koefficienterna i $p_n(x)$ (för $n = 1, 2, \dots$) som kända kombinatoriska tal.

c) (2p) **Belltalet** B_n är för $n \in \mathbb{Z}_+$ antalet olika möjliga ekvivalensrelationer på en mängd med n element. Uttryck B_n med en konvergent oändlig serie.

(Utan bevis får användas att serien $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ konvergerar mot e^x för alla $x \in \mathbb{R}$ och att om två potensserier konvergerar, konvergerar deras produkt mot produkten av deras värden.)

10) Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en (ändlig) bipartit graf ($X \cap Y = \emptyset, e \in E \Rightarrow |e \cap X| = 1$). För $A \subseteq X$, låt $r(A)$ vara det största antalet element i A som samtidigt kan matchas med element i Y (= största $|M|$ då $M \subseteq E$ är sådan att $m \in M \Rightarrow |m \cap A| = 1$ och $(m, n \in M \text{ och } m \neq n) \Rightarrow m \cap n = \emptyset$).

a) (3p) Visa att för alla $A, B \subseteq X$ gäller

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B).$$

b) (2p) Finn G, A, B sådana att $<$ gäller i a.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.