

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen

SF1679, DISKRET MATEMATIK för F3

torsdagen den 12 januari 2017, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Betygsgränser:

För	A	B	C	D	E	Fx	
krävs	32	27	22	18	15	13	poäng

Fx är inte ett betyg, men ger rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I Poängen på denna del är den minsta av 15 och summan av poängen för uppgifterna 1–5 och bonuspoängen för inlämningsuppgifterna ht16 (högst 4p).

1a) (1p) Finn det minsta $k \in \mathbb{Z}_+$, eller motivera att inget finns, som uppfyller $2^k \equiv 1 \pmod{1989}$.

b) (2p) Finn det största $k \in \mathbb{Z}_+$ som för något $x \in \mathbb{Z}$ är det minsta i $\mathbb{Z}_+$ med $x^k \equiv 1 \pmod{1989}$

och ange ett motsvarande x . $[1989 = 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17]$

2) (3p) En binär linjär kod $\mathcal{C}$ har $|\mathcal{C}| = 8$ och 101010, 111001, 110111 $\in \mathcal{C}$. Finn en kontrollmatris (eng. check matrix) H för $\mathcal{C}$ och avgör om $\mathcal{C}$ (säkert) kan rätta ett fel.

3) (3p) Didrik vill fördela de närmaste 31 dagarna mellan studier i diskret matematik, romanläsning och (data)spel, precis en aktivitet varje dag. Han tänker spela totalt 9 dagar, men aldrig två dagar i rad, och ägna (strikt) fler dagar åt den diskreta matematiken än åt romanerna (förstås).

På hur många olika sätt kan han fördela dagarna mellan aktiviteterna? Svaret får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) Låt $(G, \cdot)$ vara en grupp. Vi söker $a, b, c \in G$ med $a = b^2$, $b = c^2$, $c = a^2$.

a) (1p) Finn alla sådana $a, b, c \in G$ med minst två av dem lika.

b) (2p) Visa att om $|G| = 1467$ finns inga sådana $a, b, c \in G$ som alla är olika.

5) (3p) I en plan, sammanhängande graf har 2 hörn valens (eng. degree) 3 och alla andra har valens 4. 4 ytor begränsas av 4 kanter, medan alla andra begränsas av 3 kanter (den obegränsade ytan medräknad).

Finn alla möjliga antal hörn, kanter och ytor i grafen.

Vänd!

DEL II

6) Låt $A \subseteq G$, $A \neq \emptyset$, där $(G, *)$ är en grupp.

a) (2p) Visa att om $G_A = \{g \in G \mid a \in A \Rightarrow g * a \in A\}$ så är $|G_A| \leq |A|$.

b) (1p) Visa att om A är ändlig är G_A en delgrupp till G .

c) (1p) Ge ett exempel på G och A där G_A inte är en grupp.

(Resultatet i a) får användas i b), även om a) inte gjorts.)

7) (4p) Visa för $m, n \in \mathbb{Z}_+$ och $d = \text{sgd}(m, n)$ att

$$\phi(d)\phi(mn) = d\phi(m)\phi(n),$$

där ϕ är Eulers ϕ -funktion.

8) (4p) Permutationen $\sigma \in S_{13}$ ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\sigma(i)$	11	8	1	9	4	12	5	13	7	6	3	10	2

För hur många $\pi \in S_{13}$ är $\pi\sigma = \sigma^{-1}\pi$?

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) Om $G = (V_G, E_G)$ är en graf och $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation på V_G , med ekvivalensklasserna $\mathcal{V}_i$, $i \in I$, definierar vi **kvotgraf** $G/\mathcal{R} = (V_{G/\mathcal{R}}, E_{G/\mathcal{R}})$ enligt $E_{G/\mathcal{R}} = \{\{\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j\} \mid \text{det finns } v_i \in \mathcal{V}_i, v_j \in \mathcal{V}_j \text{ med } \{v_i, v_j\} \in E_G\}$ och $V_{G/\mathcal{R}} = \{\mathcal{V}_i \mid i \in I\}$. ($G/\mathcal{R}$ är inte säkert en enkel graf, även om G är det).

Visa att det för varje sammanhängande graf $H = (V_H, E_H)$ finns ett **träd** $T = (V_T, E_T)$ och en ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på V_T , sådana att $H \approx T/\mathcal{R}$ (dvs H och $T/\mathcal{R}$ är isomorfa) och $|E_H| = |E_T|$.

10) (5p) Man vill färga en kubs sidoytor (en färg per sida, förstås) och har rött, blått och k st andra färger att tillgå.

På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de förblir olika hur man än roterar dem) kan det ske, om det skall vara lika många röda som blå sidor?

**Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.
Där kommer så småningom också en kursenkät, fyll i den!**