

12 april 2017

Tryckfel kan förekomma.

Lösning:

Enligt Fermats lilla sats är $a^p \equiv_p a$ om p är primtal, så

3. ger $x = 3 + 11s$, något $s \in \mathbb{Z}$, som enligt 2. uppfyller

$x = 3 + 11(6 + 7t) = 69 + 77t$, något $t \in \mathbb{Z}$, som enligt 1. uppfyller en av följande två

$$69 + 77t \equiv_5 4 \Leftrightarrow 2t \equiv_5 0 \Leftrightarrow t \equiv_5 0, \text{ s\aa } x = 69 + 77(0 + 5n) = 69 + 385n, n \in \mathbb{Z} \text{ (godtyckligt).}$$

Svar: $x = 69 + 385n$ eller $x = 223 + 385n$, $n \in \mathbb{Z}$ godtyckligt.

Lösning:

Vi visar det med induktion.

Steg: Antag att påståendet är sant för $n = k, k + 1$.

$$= j(k+1) \cdot j(k+2) \cdot j(k) = (k+2) \cdot (k+2) \cdot (k+1) = ((k+2) \cdot (k+2)) \cdot (k+1) = (k+3)! = (k+2+1)!, \text{ s\aa p\aa st\aa ndet \r{a}r sant f\o r } k+2 \text{ om det \r{a}r sant f\o r } k \text{ och f\o r } k+1.$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Svar: $f(n) = (n + 1)!$ för alla $n \in \mathbb{N}$, visat ovan.

3) (3p) Vi söker antalet sätt att fördela 9 olika böcker och 17 identiska bullar bland 6 (olika) barn, då varje barn får minst en bok och minst en bulle.

Lösning:

Böckerna kan fördelas på $6! \cdot S(9, 6) = 6! \cdot 2646$ sätt

(surjektioner {böckerna} $\rightarrow$ {barnen}), stirlingtalet $S(9, 6) = 2646$

enligt "Stirlings triangel" till höger).

Bullarna kan fördelas på $\binom{11+6-1}{5} = \frac{16!}{5! \cdot 11!}$ sätt (sedan

varje barn fått en bulle, oordnat urval med (ev.) upprepning av 11 bland

6 barn, välj 5 väggar bland 16 bullväggar).

Multiplikationsprincipen ger totala antalet fördelningar.

$$6! \cdot 2646 \cdot \frac{16!}{5! \cdot 11!} = \frac{6 \cdot 2646 \cdot 16!}{11!}.$$

Svar: Fördelningen kan ske på $\frac{6 \cdot 2646 \cdot 16!}{11!}$ ($= 8\,321\,564\,160$) sätt.

4) $(G, \cdot)$ är en grupp och H, K ändliga delgrupper till G . Vi söker möjliga värden (då $|H|, |K|$ är givna) för (a, 1p) $|H \cap K|$ och (b, 2p) $|aH \cap bK|$, då $a, b \in G$.

Lösning:

a. $H \cap K$ är en delgrupp till H och till K , så $|H \cap K| \mid \text{sgd}(|H|, |K|)$. För grupper A, B, D med $|A| = a, |B| = b, |D| = d$ visar exemplet $G = A \times D \times B, H = A \times D \times \{1_B\}, K = \{1_A\} \times D \times B$ (med $|H| = ad, |K| = bd, |H \cap K| = d$) att alla delare till $\text{sgd}(|H|, |K|)$ är möjliga.

b. $aH \cap bK$ kan vara $\emptyset$ (t.ex. om $H = K = \{1\}, a \neq b$) och om $c \in aH \cap bK$ är $cH = aH, cK = bK$ (vänstersidoklasser är identiska eller disjunkta), så $aH \cap bK = c(H \cap K)$ och $|aH \cap bK| = |H \cap K|$.

Svar: Möjliga är a: alla delare till $\text{sgd}(|H|, |K|)$, b: samma och dessutom 0.

5) (3p) Vi söker en ordning av $1, 2, \dots, 9$ kring en cirkel, så att summan av två grannar aldrig är delbar med 3, 5 eller 7.

Lösning:

Problemet löses av en hamiltoncykel i en graf med hörnen märkta med siffrorna och kanter mellan tillåtna grannar (dvs $\{i, j\}$ är en kant omm $3, 5, 7 \nmid (i + j)$). 1, 2 och 4 har bara två grannar i grafen, så deras kanter måste ingå i cykeln. Det ger följderna 6, 2, 9, 4, 7, 1, 3 och de återstående 8, 5 kan bara kopplas in i den ordningen (eftersom 6 och 8 inte är grannar).

Svar: En ordning (den väsentligen enda) är 1, 3, 8, 5, 6, 2, 9, 4, 7.

6) Vi söker (a, 2p) antalet väsentligt olika armband med 6 färgade (k färger möjliga) pärlor på en ögla och (b, 2p) hur många av dem som har minst en vardera röd och blå pärla.

Lösning:

a. Vi använder Burnsides lemma. Om armbandet placeras med pärlorna i hörnen av en regelbunden sexhörning, ser man att gruppen G som verkar på mängden av konfigurationer beskrivs av identitetsavbildningen id , elementen $r, r^2, \dots, r^5$ (där r är rotation $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ kring en axel genom sexhörningens mittpunkt och vinkelrät mot dess plan) och tre olika rotationer π vardera av typ s_1, s_2 (där s_1 är rotation kring en axel i sexhörningens plan, genom mittpunkter av två av motstående sidor och s_2 kring en axel genom två motstående hörn). $|F(g)|$, antalet konfigurationer som inte ändras av g , ses vara som i tabellen:

g :s typ	antal sådana g	g :s permutation av pärlorna	$ F(g) $
id	1	$[1^6]$	k^6
r, r^5	2	$[6]$	k
r^2, r^4	2	$[3^2]$	k^2
r^3	1	$[2^3]$	k^3
s_1	3	$[2^3]$	k^3
s_2	3	$[1^2 2^2]$	k^4

Så antalet väsentligt olika armband = antalet banor under G :s verkan = $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{12}(1 \cdot k^6 + 2k + 2k^2 + k^3 + 3k^3 + 3k^4) = \frac{1}{12}(k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k)$.

b. Låt X vara alla färgningar i a) och B de utan någon blå pärla, R de utan någon röd pärla. Då söker vi nu $|X \setminus (B \cup R)| = |X| - |B| - |R| + |B \cap R| = f(k) - 2 \cdot f(k-1) + f(k-2)$, där $f(k)$ är svaret i a). Det blir $\frac{1}{2}(5k^4 - 20k^3 + 41k^2 - 38k + 14)$.

Svar a: Antalet olika sådana armband är $f(k) = \frac{1}{12}(k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k)$,

b: Antalet är nu $\frac{1}{2}(5k^4 - 20k^3 + 41k^2 - 38k + 14)$.

(Det går också bra att svara i b) utan att utveckla, så svaret kan börja $\frac{1}{12}(k^6 - 2(k-1)^6 + (k-2)^6 + \dots)$)

7) (4p) $\pi \in S_{10}$ ges av tabellen $\frac{i}{\pi(i)} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 4 & 8 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{array}$.

Vi söker antalet funktioner $f: \mathbb{N}_{10} \rightarrow \mathbb{N}_{10}$ med $f(\pi(i)) = \pi(f(i))$ för alla $i \in \mathbb{N}_{10}$.

Lösning:

På cykelform är $\pi = (1\ 9\ 6)(2\ 7)(3\ 10)(4)(5\ 8)$ (ty $\pi(1) = 9, \pi(9) = 6, \pi(6) = 1, \dots$).

En funktion med den aktuella egenskapen bestäms helt av värdena för ett i i var och en av π 's cykler (ty $f(\pi(i)) = \pi(f(i))$ etc.) och f uppfyller villkoret precis om $f(i)$ tillhör en m -cykel, med $m \mid k$, om i är från en k -cykel (ty $f(i) = f(\pi^k(i)) = \pi^k(f(i))$).

Antalet sådana f blir $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 = 1372$ (möjliga val för $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$).

Svar: Det finns 1372 olika sådana funktioner.

8) (4p) Vi söker $A \subseteq \mathbb{Z}_+$, sådan att (med Biggs beteckningar):

$$p(n \mid \text{för alla } k \in \mathbb{Z}_+ : \begin{cases} \text{om } 3 \mid k: \text{ ett godtyckligt antal delar av storlek } k, \\ \text{annars: högst två delar av storlek } k \end{cases}) = p(n \mid \text{varje dels storlek tillhör } A).$$

Lösning:

Den genererande funktionen för talen i VL är

$$\prod_{k>0, 3 \nmid k} (1 + x^k + x^{2k}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{3k}} = \prod_{k>0, 3 \nmid k} \frac{(1-x^{3k})}{(1-x^k)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{3k}} = \prod_{k>0, 3 \nmid k} \frac{1}{(1-x^k)} \cdot \prod_{k>0, 3 \mid k} \frac{1}{1-x^{3k}} = \prod_{k>0, \text{sgd}(k,9) \neq 3} \frac{1}{1-x^k},$$

den genererande funktionen för talen i HL omm A är mängden av k i den sista produkten.

(Minns att det inte är några konvergensproblem. Bara ett ändligt antal faktorer $\neq 1$ bidrar till ett visst x^n .)

Svar: $A = \{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \text{sgd}(k, 9) \neq 3\}$.

9) $(G, *)$ och $(A, \circ)$ med identitetselement I respektive e är grupper (A abelsk). G verkar på mängden A med $g(a \circ b) = g(a) \circ g(b)$ (för $g \in G, a, b \in A$). Vi skall (a, 3p) visa att $(K, \odot)$ är en grupp, där $K = G \times A$ och $\odot$ ges av $(g_1, a_1) \odot (g_2, a_2) = (g_1 * g_2, g_1(a_2) \circ a_1)$ och (b, 2p) avgöra om $H_1 = G \times \{e\}$, $H_2 = \{I\} \times A$ är delgrupper och normala delgrupper till $(K, \odot)$.

Lösning:

a. Att $(K, \odot)$ är en grupp följer av att axiomen för en grupp (G1–G4) är uppfyllda.

G1 (slutenhet): $g_1 * g_2 \in G$ och $g_1(a_2) \circ a_1 \in A$ för alla $g_1, g_2 \in G, a_1, a_2 \in A$ (G, A slutna under $*$, $\circ$ och $g_1(a_2) \in A$). G1 klart.

G2 (associativitet): $((g_1, a_1) \odot (g_2, a_2)) \odot (g_3, a_3) = (g_1 * g_2, g_1(a_2) \circ a_1) \odot (g_3, a_3) = ((g_1 * g_2) * g_3, (g_1 * g_2)(a_3) \circ (g_1(a_2) \circ a_1))$ skall vara lika med $(g_1, a_1) \odot ((g_2, a_2) \odot (g_3, a_3)) = (g_1, a_1) \odot (g_2 * g_3, g_2(a_3) \circ a_2) = (g_1 * (g_2 * g_3), g_1(g_2(a_3) \circ a_2) \circ a_1)$.

($g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ (* associativ),

$(g_1 * g_2)(a_3) \circ (g_1(a_2) \circ a_1) = (g_1(g_2(a_3)) \circ g_1(a_2)) \circ a_1$ (G verkar på A , $\circ$ associativ) och

$g_1(g_2(a_3) \circ a_2) \circ a_1 = (g_1(g_2(a_3)) \circ g_1(a_2)) \circ a_1$ (givna egenskapen hos G 's verkan) G2 klart.

G3 (identitetselement): $(I, e) \odot (g, a) = (I * g, I(a) \circ e) = (g, a \circ e) = (g, a)$ och $(g, a) \odot (I, e) = (g * I, g(e) \circ a) = (g, e \circ a) = (g, a)$ (I, e identitetselement, $I(a) = a$ (alla $a \in A$), $g(e) = e$ (alla $g \in G$)).

(ty $e \circ g(e) = g(e) = g(e \circ e) = g(e) \circ g(e)$), så (I, e) är ett identitetselement. G3 klart.

G4 (invers): $(g, a) \odot (g^{-1}, g^{-1}(a^{-1})) = (g * g^{-1}, g(g^{-1}(a^{-1})) \circ a) = (I, (g * g^{-1})(a^{-1}) \circ a) = (I, I(a^{-1}) \circ a) = (I, a^{-1} \circ a) = (I, e)$ ($^{-1}$ invers i G eller i A , G verkar på A , $I(b) = b$, alla $b \in A$),

$(g^{-1}, g^{-1}(a^{-1})) \odot (g, a) = (g^{-1} * g, g^{-1}(a) \circ g^{-1}(a^{-1})) = (I, g^{-1}(a \circ a^{-1})) = (I, g^{-1}(e)) = (I, e)$, så $(g^{-1}, g^{-1}(a^{-1}))$ är inverselement till (g, a) . G4 klart. **Så $(K, \odot)$ är en grupp.**

b. H_1 och H_2 är delgrupper till K (bijektionerna $\phi_1((g, e)) = g, \phi_2((I, a)) = a$ är isomorfier med G respektive A , ty $(g_1, e) \odot (g_2, e) = (g_1 * g_2, g_1(e) \circ e) = (g_1 * g_2, e)$ och $(I, a_1) \odot (I, a_2) = (I * I, I(a_2) \circ a_1) = (I, a_1 \circ a_2)$. $(I, a) \odot H_1 = \{(g, a) \mid g \in G\}$ och $H_1 \odot (I, a) = \{(g, g(a)) \mid g \in G\}$ är inte lika om $g(a) \neq a$ för något $g \in G$, så H_1 behöver inte vara en normal delgrupp.

$(g, a) \odot H_2 = \{(g, g(a') \circ a) \mid a' \in A\}$ och $H_2 \odot (g, a) = \{(g, a \circ a') \mid a' \in A\}$. Båda är $\{g\} \times A$ (g verkar som en bijektion på A), så H_2 är normal.

Svar b: H_1 och H_2 är delgrupper. H_2 är normal, men det är H_1 inte säkert.

(K kallas en halvdirekt produkt av grupperna G och A . Villkoret att A är abelsk behövs inte (se lösningen).

Mer naturligt är att definiera $(g_1, a_1) \odot (g_2, a_2) = (g_1 * g_2, a_1 \circ g_1(a_2))$.)

10) (5p) $G = (V, E)$ är en oändlig graf, E uppräknelig. Vi skall visa $i) \Leftrightarrow ii)$, då
 $i)$: För varje ändlig $X \subset V$ är antalet kanter med precis ett hörn i X oändligt eller jämnt,
 $ii)$: Det finns en mängd av cykler och (åt båda håll) oändliga stigar, med varje $e \in E$ i precis en av dem.

Lösning:

$i) \Rightarrow ii)$: Låt $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ vara en uppräkning av E , $e_0 = \{v, v'\}$. Enligt $i)$, med $X = \{v\}$, finns ett minsta $k > 0$ med $v \in e_k$ och motsvarande för v' . Dessa kanter "sätts ihop" med e_0 och detta upprepas med ändpunkterna i de successivt bildade stigarna. På så sätt fås en cykel med e_0 (om en ändpunkt får en kant till den andra) eller en dubbelt oändlig stig med e_0 .

Om alla kanter som ingår i den bildade cykeln/stigen tas bort från G fås en ny graf $G' = (V, E')$, som också uppfyller $i)$ (för varje ändlig $X \subset V$ (men inte säkert för oändliga) finns ett jämnt antal kanter i cykeln/stigen som innehåller precis ett hörn i X (de vid slutet av sammanhängande sträckor av X -hörn), så ett jämnt antal kanter tas från motsvarande kantmängd i G). Utgå från $e_k \in E'$ med minimalt k och bilda en ny cykel/stig som ovan. Upprepa.

Mängden av alla så bildade cykler/stigar (ändlig eller oändlig) visar att $ii)$ är uppfyllt.

$ii) \Rightarrow i)$: Som vi såg har varje cykel eller dubbelt oändlig stig för ändligt $X \subset V$ ett jämnt antal kanter med precis ett hörn från X . Om $ii)$ är uppfyllt är mängden av alla sådana kanter i E en union av mängder med jämna antal element, så $i)$. **Saken är klar.**
