

Matematik, KTH

B.Ek

**Tentamen i kursen**  
**SF1679, DISKRET MATEMATIK för F3**  
**onsdagen den 12 april 2017, klockan 8.00–13.00**

**Examinator:** Bengt Ek, tel 790 6951.

**Tillåtna hjälpmedel:** Inga, inte ens räknedosa.

**Betygsgränser:**

| För   | A  | B  | C  | D  | E  | Fx    |
|-------|----|----|----|----|----|-------|
| krävs | 32 | 27 | 22 | 18 | 15 | 13    |
|       |    |    |    |    |    | poäng |

Fx är inte ett betyg, men ger rätt att delta i en komplettering för betyg E.

**För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.**  
Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

---

**DEL I** Poängen på denna del är den minsta av 15 och summan av poängen för uppgifterna 1–5 och bonuspoängen för inlämningsuppgifterna ht16 (högst 4p).

1) (3p) Finn alla  $x \in \mathbb{Z}$  sådana att

$$x^{31} + 158x \equiv 191 \pmod{385}.$$

2) (3p) Låt (för  $n \in \mathbb{N}$ )  $\mathcal{A}_n = \{B \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \mid x, y \in B \Rightarrow y \neq x \pm 1\}$  och

$$f(n) = \sum_{B \in \mathcal{A}_n} \prod_{k \in B} k^2,$$

där (som vanligt) ”den tomma produkten” är 1,  $\prod_{x \in \emptyset} x = 1$ .

Ex.  $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$ ,

$$\text{så } f(4) = 1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 \cdot 3^2 + 1^2 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 4^2 = 120.$$

Finn ett (enkelt) uttryck för  $f(n)$  och visa att det är riktigt för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

3) (3p) På hur många sätt kan 9 olika böcker och 17 likadana bullar fördelas bland 6 barn, så att varje barn får minst en bok och minst en bulle?

Barnen och böckerna betraktas som särskiljbara, men bullarna som identiska. Svaret får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) Låt  $(G, \cdot)$  vara en grupp och  $H, K$  ändliga delgrupper till  $G$ .

a) (1p) Givet  $|H|$  och  $|K|$ , vilka värden är möjliga för  $|H \cap K|$ ?

b) (2p) Givet  $|H|$  och  $|K|$ , vilka värden är möjliga för  $|aH \cap bK|$ , då  $a, b \in G$ ?

(Med att ett värde är möjligt avses att det finns  $G, H, K$  som ger det värdet.)

5) (3p) Finn ett sätt att ordna talen  $1, 2, \dots, 9$  kring en cirkel, så att summan av två tal som är grannar aldrig är delbar med 3, 5 eller 7.

Ex.  $5 \mid (2 + 8)$ , så 2 och 8 får inte vara grannar.

[Ledning: Finn en lämplig cykel i en lämplig graf.]

---

*Vänd!*

## DEL II

**6a)** (2p) Ett armband skapas av 6 färgade ( $k$  olika färger möjliga) pärlor uppträdde på en ögla av snöre. Finn antalet väsentligt olika sådana armband.

**b)** (2p) Hur många av dem har minst en röd och minst en blå pärla?

(Rött och blått är bland de  $k$  färgerna. Pärlorna ser likadana ut från båda håll och armbanden kan vändas och vridas. Man får göra uppgift b utan att ha gjort a, kalla då svaret i a för  $f(k)$ .)

**7)** (4p) Permutationen  $\pi \in S_{10}$  ges av tabellen:

| $i$      | 1 | 2 | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
| $\pi(i)$ | 9 | 7 | 10 | 4 | 8 | 1 | 2 | 5 | 6 | 3  |

För hur många funktioner  $f: \mathbb{N}_{10} \rightarrow \mathbb{N}_{10}$  är  $f(\pi(i)) = \pi(f(i))$ , alla  $i \in \mathbb{N}_{10}$ ?

**8)** (4p) Finn en mängd  $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ , sådan att antalet partitioner av varje  $n \in \mathbb{Z}_+$  i delar av godtyckligt antal med storlek en multipel av 3 och högst två för övriga storlekar är lika med antalet partitioner av  $n$  med varje dels storlek i  $A$ . Dvs, med Biggs beteckningar:

$$p(n \mid \text{för alla } k \in \mathbb{Z}_+ : \begin{cases} \text{om } 3 \mid k: \text{ ett godtyckligt antal delar av storlek } k, \\ \text{annars: högst två delar av storlek } k \end{cases}) = \\ = p(n \mid \text{varje dels storlek tillhör } A).$$

## DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

**9)** Låt  $(G, *)$  vara en grupp med identitets-element  $I$  och  $(A, \circ)$  vara en abelsk grupp med identitets-element  $e$ . Gruppen  $G$  verkar på mängden  $A$  så att (för alla  $g \in G$ ,  $a, b \in A$ )  $g(a \circ b) = g(a) \circ g(b)$  (och, som vanligt,  $I(a) = a$  för alla  $a \in A$ ).

Låt nu  $K = G \times A$  och inför  $\odot$  enligt  $(g_1, a_1) \odot (g_2, a_2) = (g_1 * g_2, g_1(a_2) \circ a_1)$ .

**a)** (3p) Visa att  $(K, \odot)$  är en grupp. Motivera ordentligt.

**b)** (2p) Med  $H_1 = G \times \{e\}$  och  $H_2 = \{I\} \times A$ , avgör (för  $i = 1, 2$ ) om  $(H_i, \odot)$  säkert är en delgrupp och om den säkert är en normal delgrupp (dvs om vänstersidoklasser och högersidoklasser är lika) till  $(K, \odot)$ .

**10)** (5p) Låt  $G = (V, E)$  vara en oändlig graf med  $E$  en uppräknelig mängd. Visa att följande två villkor är ekvivalenta,  $i) \Leftrightarrow ii)$ ,

*i)* För varje ändlig  $X \subset V$  är antalet kanter som har precis ett hörn i  $X$  antingen oändligt eller ett jämnt tal,

*ii)* Det finns en mängd av dels cykler och dels åt båda håll oändliga stigar, sådan att varje  $e \in E$  ligger i precis en av dessa cykler eller stigar.

(En oändlig graf definieras på samma sätt som en ändlig (fast  $V$  och  $E$  kan vara oändliga mängder), cykler och stigar definieras som i det ändliga fallet. Hörn kan ha oändlig valens.)

**Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.**