

(Diskret matte F, ht17: L22, ti 5 dec 2017)

Genererande funktioner:

Vi löste följande problem med **genererande polynom**:

Finns det reella tal $p_1, p_2, \dots, p_6$ och $q_1, q_2, \dots, q_6$ med $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 1$, sådana att två tärningar som visar i ögon med sannolikheter p_i respektive q_i tillsammans visar $2, 3, \dots, 12$ ögon med vardera sannolikhet $\frac{1}{11}$?

Svaret är **nej**, vilket framgår av att $(p_1 + p_2x + \dots + p_6x^5)(q_1 + \dots + q_6x^5)$ inte kan vara $\frac{1}{11}(1 + x + \dots + x^{10})$ (som saknar reella nollställen).

För att behandla oändliga talföljder kan man använda **formella potensserier**,

$$(a_0, a_1, \dots) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x) \in \mathbb{C}[[x]],$$

där $\mathbb{C}[[x]]$ är ringen av formella potensserier (med komplexa koefficienter), med summa och produkt definierade av

$$\begin{aligned} \sum a_n x^n + \sum b_n x^n &= \sum (a_n + b_n) x^n, \\ \sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n &= \sum c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \end{aligned}$$

Obs! Serierna är just formella, x ges inte värden, ingen konvergens.

Sats: $B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ är inverterbar i $\mathbb{C}[[x]]$ om $b_0 \neq 0$.

Ex. $(1 - x)^{-1} = \sum x^n$.

Partitioner av naturliga tal är inte detsamma som partitioner av mängder.

En **partition** av $n \in \mathbb{N}$:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k, \quad n_k \geq n_{k-1} \geq \dots \geq n_1 \geq 1$$

Antalet partitioner av n i precis k delar: $p_k(n)$ och totala antalet partitioner av n : $p(n)$.

Genererande funktionen för $p(n)$:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}.$$

(För att bestämma koefficienten för ett visst x^n räcker n faktorer.)

Sats (Euler): $p(n \mid \text{alla delar olika}) = p(n \mid \text{alla delar udda})$

Visas enligt ($D(x)$ genererande funktionen för VL, $U(x)$ den för HL)

$$D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}} \cdot \frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3} \cdots = U(x).$$