

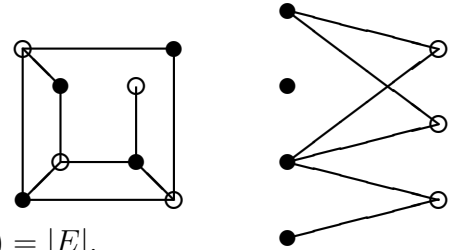
Königs (oändlighets)lemma: (inte i boken) Om $G = (V, E)$ är en oändlig (dvs V är oändlig), sammanhängande graf så finns minst ett hörn med oändlig valens eller en oändlig stig från varje hörn (eller båda).

En **bipartit** graf $G = (X \cup Y, E)$:

$X \cap Y = \emptyset$, alla kanter mellan X och Y

$\Leftrightarrow$

G är 2-(hörn)färgbar



Sats: G bipartit $\Rightarrow \sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y) = |E|$.

Sats: G är bipartit $\Leftrightarrow$ det finns **ingen udda cykel** i G .

$G = (X \cup Y, E)$ har en hamiltoncykel $\Rightarrow |X| = |Y|$

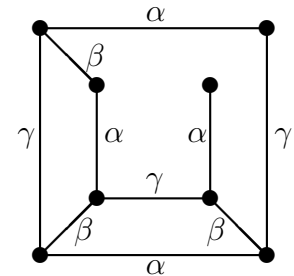
$G = (X \cup Y, E)$ har en hamiltonstig $\Rightarrow |X| = |Y|$ eller $|X| = |Y| \pm 1$

En **kantfärgning** av grafen $G = (V, E)$:

en funktion $f: E \rightarrow \mathbb{N}$

så att $|e_1 \cap e_2| = 1 \Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2)$

dvs kanter till samma hörn har olika färg



Kromatiska index (nämns inte i boken) $\chi'(G)$ för G :
minsta antalet färger som G kan kantfärgas med.

Sats (Vizing (1964), inte i boken): Om G har maxvalens k gäller $k \leq \chi'(G) \leq k + 1$.

Sats (inte i boken): Fyrfärgssatsen är ekvivalent med påståendet att $\chi'(G) = 3$ för varje planär 3-reguljär graf G , sådan att varje kant ingår i (minst) en cykel.

Sats: Om G är bipartit med maxvalens k är $\chi'(G) = k$

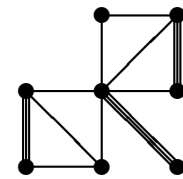
(Visas med **alternerande stigar**)

Sats: En latinsk $m \times n$ -rektangel ($m < n$) kan utvidgas till en latinsk $n \times n$ -kvadrat

En **matchning** M för grafen $G = (V, E)$:

$M \subseteq E$, kanterna i M parvis disjunkta

Fullständig matchning: varje hörn i G ingår i någon kant i M (om $G = (X \cup Y, E)$ är bipartit kräver vi bara $|M| = |X|$, dvs att alla hörn i X är matchade (ä.k. X -fullständig matchning))



En maxmatchning som inte är fullständig

Maxmatchning (eng. maximum matching):

så många av G 's hörn som möjligt ingår, dvs $|M|$ är maximal

Halls sats: En bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ har en (X -)fullständig matchning om $|J(A)| \geq |A|$, alla $A \subseteq X$

där $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$

Visades med (induktion över $|M|$ och) **utökande alternerande stigar**, stigar som börjar och slutar i omatchade hörn och där varannan kant tillhör M (och varannan inte).

Följande hanns inte på lektionen, kommer på tisdag:

Transversaler

Om $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ är en indexerad uppsättning mängder, kallas en indexerad mängd $\{s_i\}_{i \in I}$ med $s_i \in S_i$ för alla $i \in I$ och $s_i \neq s_j$ om $i \neq j$ för en **transversal** för $\mathcal{S}$.

Halls sats handlade ursprungligen om transversaler och säger att om I är ändlig har $\mathcal{S}$ en transversal om

$$|\bigcup_{i \in H} S_i| \geq |H| \text{ för alla } H \subseteq I.$$

(Ses genom att betrakta den bipartita grafen med $X = I$, $Y = \bigcup_{i \in I} S_i$ och kanter precis mellan varje $i \in I$ och alla element i S_i och använda giftermålssatsen.

Om I är ändlig gäller satsen även för oändliga S_i (finn först en transversal till de ändliga av S_i :na och välj sedan nya element från de oändliga) och om S_i :na alla är ändliga gäller satsen (med villkoret ovan för ändliga H) också för oändliga I (kan visas med logikens kompaktetessats eller, för uppräknligt I , med Kónigs lemma, vilket gjordes på lektionen.)

Om maxmatchningar

Sats: Om M är en maxmatchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ gäller $|M| = |X| - d(G)$, där $d(G) = \max_{A \subseteq X} (|A| - |J(A)|)$, grafens **underskott** eller **defekt**.

Sats: En matchning i en bipartit graf är en maxmatchning **om** det inte finns någon utökande alternerande stig (dvs en alternerande stig med omatchade första och sista hörn) för M .

En algoritm för att finna maxmatchningar

För att finna en maxmatchning i en bipartit graf:

För varje omatchat hörn $x \in X$:

Undersök alla alternerande stigar från x , tills en leder till ett omatchat hörn. Byt i M ut stigens M -kanter mot stigens andra kanter, få en matchning M' med $|M'| = |M| + 1$.

Upprepa så länge det går, dvs så länge någon alternerande stig från ett omatchat X -hörn leder till ett omatchat Y -hörn. (Om det inte finns någon sådan stig leder sökandet antingen in i cykler (så det behövs en spärr mot fortsatt sökande längs stigar som upprepar sig) eller stopp när det inte finns någon omatchad kant att följa.)