

(Diskret matte F, ht17: L19, on 29 nov 2017)

En **hörnfärgning** av grafen $G = (V, E)$:

- en funktion $c : V \rightarrow \mathbb{N}$,
- sådan att $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$

Kromatiska talet $\chi(G)$ för G :

minsta antalet färger som G kan hörnfärgas med

En **girig algoritm** för att approximera $\chi(G)$:

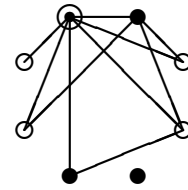
1. ordna hörnen: $v_1, v_2, \dots, v_n$,
2. välj i ordning $c(v_1), c(v_2), \dots$ minsta möjliga, givet de redan valda.

Sats: G har maxvalens $k \Rightarrow$

- $\chi(G) \leq k + 1$
- om G sammanhängande och inte reguljär så $\chi(G) \leq k$.

(I själva verket gäller den starkare **Brooks sats** (1941) (inte i boken, nämndes kort på lektionen):

Om G är sammanhängande och inte isomorf med K_m för något m eller med C_n för ett udda n , är $\chi(G) \leq k$, maxvalensen i G .)



Det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ för en graf G

Antalet sätt att hörnfärga grafen $G = (V, E)$ med (högst) λ färger ges av det **kromatiska polynomet** $P_G(\lambda)$.

Kromatiska talet $\chi(G)$ är det **minsta** $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ med $P_G(\lambda) \neq 0$.

$P_G(\lambda)$ är, som namnet antyder, ett polynom.

Dess högstgradsterm är $\lambda^{|V|}$.

Nästhögstgradstermen är $-|E|\lambda^{|V|-1}$.

Koefficienterna är alternerande ≥ 0 och ≤ 0 .

Konstanttermen är 0 (om $|V| > 0$).

Rekursionsformel:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda),$$

där $G - e$ är grafen G med kanten e borttagen och G/e är G med kanten e kontraherad (dvs hörnen i e :s ändar sammanslagna). Eftersom graferna i högerledet har strikt färre kanter än G bestämmer detta tillsammans med basen $P_{(V, \emptyset)}(\lambda) = \lambda^{|V|}$ polynomet $P_G(\lambda)$ för alla (ändliga) grafer.

Med induktion motsvarande rekursionen visas egenskaperna ovan för $P_G(\lambda)$.

Med rekursion fann vi för den cykliska grafen C_n

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

Som en tillämpning av principen om inklusion och exklusion kan man visa (vilket dock inte gjordes på lektionen, genomför det gärna själv) att antalet sätt att färga G med **exakt** λ färger är $\sum_{j=\chi(G)}^{\lambda} (-1)^{\lambda-j} \binom{\lambda}{j} P_G(j)$.

Planära grafer

En **plan graf**: En "konkret graf" i planet vars kanter inte korsar varandra

En **planär graf**: En graf som är isomorf med en plan graf,
dvs den **kan ritas** i planet utan att kanter korsas

Sats: (Eulers polyederformel): Om en sammanhängande plan graf har v hörn, e kanter och r ytor gäller

$$v - e + r = 2$$

Allmännare: Om grafen har c komponenter gäller

$$v - e + r - c = 1$$

Den ger (eftersom varje yta om $e \geq 2$ har minst 3 kanter)

Sats: För en sammanhängande planär graf med $e \geq 2$ gäller $3v \geq e + 6$

Om grafen också är bipartit gäller $2v \geq e + 4$

Sats: En planär graf har hörn med valens ≤ 5 .

De fullständiga graferna K_n , $n \geq 5$ och $K_{p,q}$, $p, q \geq 3$ är **inte planära**

Om en graf är icke-planär "innehåller" den alltid (minst) en av K_5 och $K_{3,3}$:

Kuratowskis (1930) och Wagners (1937) satser:

Grafen G är icke-planär **om** en graf som är isomorf med K_5 eller $K_{3,3}$ kan fås från G med en följd (0 eller fler) av operationerna:

- ta bort ett hörn (och dess kanter)
- ta bort en kant
- – Kuratowski: "sudda ut" ett hörn med valens 2
(bevara en kant mellan dess grannar)
- Wagner: kontrahera en kant
("dra ihop" hörnen vid kanten till ett nytt hörn)

(Villkoret i Wagners sats kallas att K_5 eller $K_{3,3}$ är en **minor** till G .)

Duala grafen (inte säkert en enkel graf, även om G är det) $G^\perp$ till en plan graf G :

(Isomorfa plana grafer kan ha icke-isomorfa dualgrafer.)

ett hörn i var och en av G 's ytor

en kant genom var och en av G 's kanter

Då gäller $v^\perp = r$, $e^\perp = e$ (med v , e , r som i satsen ovan).

Om(m) G är (plan och) sammanhängande, är $r^\perp = v$ och $(G^\perp)^\perp$ isomorf med G .

Hanns inte, kommer nästa lektion:

Fyrfärgssatsen: G planär $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

På lektionen visades sex- och femfärgssatserna.

Följande gås inte igenom på lektionerna, finns i materialet om planära grafer:

En **regelbunden polyeder** (en platonsk kropp):

alla sidoytor regelbundna m -hörningar, alla hörn kongruenta, valens n .

Det motsvarar en "dubbelt reguljär" plan, sammanhängande graf:

alla ytor har **m kanter** (dvs $G^\perp$ är m -reguljär), alla hörn har **valens n** .

Enda möjliga sådana:

m	n	v	e	r	motsvarande polyeder
3	5	12	30	20	ikosaeder (dual till dodekaedern)
3	4	6	12	8	oktaeder (dual till hexaedern)
3	3	4	6	4	tetraeder (dual till sig själv)
4	3	8	12	6	hexaeder (kub) (dual till oktaedern)
5	3	20	30	12	dodekaeder (dual till ikosaedern)