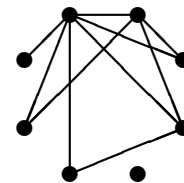


(Diskret matte F, ht17: L18, ti 28 nov 2017)

En (enkel) **graf** $G = (V, E)$:

V en ändlig mängd, **hörnen** (ritade som prickar)

E en mängd 2-delmängder till V , **kanterna**
(ritade som streck eller kurvor mellan prickarna)



$x, y \in V$ sägs vara **grannar** i grafen om $\{x, y\} \in E$.

Standardnamn för vissa grafer:

K_n (den fullständiga grafen med n hörn, $n \in \mathbb{Z}_+$), C_n (den cykliska grafen med n hörn, $n \geq 3$).

I en **grannlista** (eng. adjacency list) för G anges för varje hörn dess grannar.

En **grannmatris** för G är en $|V| \times |V|$ -matris med 1 i position ij om hörn i och hörn j är grannar, 0 annars.

Grannlistan och grannmatrisen beskriver var och en grafen fullständigt.

Valensen för ett hörn v : $\delta(v)$ = antalet grannar till v .

G är **reguljär** omm alla valenser är lika

Sats: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$

Följsats ("Handslagslemmat"): Antalet **udda hörn** (med udda valens) är **jämnt**.

G_1 och G_2 är **isomorfa** omm det finns en **bijektion** $\alpha: V_1 \rightleftharpoons V_2$, sådan att
 $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E_2$

Hörnföljder i en graf

En **vandring** (eng. walk): $v_1 v_2 \dots v_k$, där $v_i v_{i+1} \in E$ för $i = 1 \dots k-1$

En **väg** (eng. trail): en vandring där alla passerade kanter är olika

En **krets** (eng. circuit): en sluten väg, dvs en väg $v_1 v_2 \dots v_{k+1}$ med $v_1 = v_{k+1}$

En **stig** (eng. path): en väg med **alla** v_i **olika**

En **cykel** (eng. cycle): en krets $v_1 v_2 \dots v_{k+1}$ med $v_1 v_2 \dots v_k$ en stig, $k \geq 3$

Antalet vandringar mellan givna hörn i en graf

Antalet vandringar av längd r mellan hörnen i och j i grafen G är ij -elementet i matrisen A^r , där A är G 's grannmatris. (Additions- och multiplikationsprinciperna.)
 G kan här också vara riktad och ha öglor och multipla kanter (då kan A ha andra element än 0 och 1 och behöver inte vara symmetrisk).

En graf G är **sammanhängande** om två godtyckliga hörn kan förbindas med en väg (eller, ekvivalent, med en vandring eller med en stig).

En **komponent** av grafen: En maximal sammanhängande del.

En **hamiltoncykel**: en $|V|$ -cykel (dvs en cykel genom alla grafens hörn)
en **hamiltonstig**: en stig genom alla hörn.

Det är i allmänhet svårt att avgöra om en graf är hamiltonsk (dvs har en hamiltoncykel).

Som illustration nämnde vi följande, som ibland kan användas för grafer med många kanter:

Ores sats (1960), jfr Biggs 15.8:21:

En graf $G = (V, E)$ med $|V| \geq 3$ är hamiltonsk om den uppfyller villkoret:

$$x, y \in V, x \neq y, xy \notin E \Rightarrow \delta(x) + \delta(y) \geq |V|.$$

En **eulerkrets**: en krets som passerar varje kant i grafen exakt en gång,
en **eulerväg**: en väg som passerar varje kant exakt en gång.

Det är lätt att avgöra om en graf är eulersk (har en eulerkrets):

Sats (Euler):

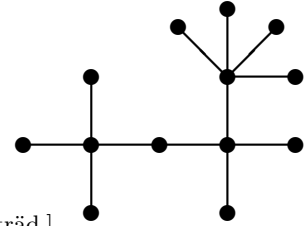
G har en eulerkrets $\Leftrightarrow \begin{cases} G \text{ är sammanhängande (+ ev. lösa hörn)} \\ G \text{ har inga udda hörn} \end{cases}$

G har en eulerväg
(som inte är en eulerkrets) $\Leftrightarrow \begin{cases} G \text{ är sammanhängande (+ ev. lösa hörn)} \\ G \text{ har precis två udda hörn} \end{cases}$

Ett **träd** $T = (V, E)$ är
en **sammanhängande** graf **utan** cykler

Då

- $x, y \in V \Rightarrow$
det finns en **unik stig** från x till y i T
[Detta kan användas som en alternativ **definition** av ett träd.]
- om en kant i E tas bort, återstår två träd
- $|E| = |V| - 1$ (om $|V| \geq 1$)



För varje sammanhängande graf $G = (V, E)$ finns ett **(upp)spännande träd**,
dvs ett träd $T = (V, E')$ med $E' \subseteq E$.