

Delgrupper

H är en **delgrupp** till $(G, *)$ om $H \subseteq G$ och $(H, *)$ är en grupp.

Sats: Om G är en grupp och $H \subseteq G$ gäller att

$$H \text{ är en delgrupp till } G \Leftrightarrow \begin{cases} S0 & H \neq \emptyset \\ S1 & x, y \in H \Rightarrow xy \in H \\ S2 & x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{cases}$$

Om H är **ändlig**, räcker $S0$ och $S1$.

Exempel: Om G är en grupp är

$$\mathcal{Z}(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ för alla } g \in G\}$$

en delgrupp till G . Den kallas **G 's centrum**.

Varje $x \in G$ (G en grupp) genererar en **cyklisk delgrupp**,

$$\langle x \rangle = \{x^i \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Då är $o(x) = |\langle x \rangle|$.

Sidoklasser

Definition: Om H är en delgrupp till G och $g \in G$ är $gH = \{gh \mid h \in H\}$ en **vänstersidoklass** till H och $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ en **högersidoklass**.

$$|H| = |gH| = |Hg|$$

Sidoklasserna ger **partitioner** av G i lika stora mängder.

Ex. $G_\Delta = \{i, r, r^2, x, xr, xr^2\}$, med $r^3 = x^2 = i$, $rx = xr^2$ och $H = \{i, x\}$ ger
 $iH = xH = H$, $rH = xr^2H = \{r, xr^2\}$, $r^2H = xrH = \{r^2, xr\}$
 $Hi = Hx = H$, $Hr = Hxr = \{r, xr\}$, $Hr^2 = Hxr^2 = \{r^2, xr^2\}$

Vänstersidoklasser:

i	r	xr
x	xr^2	r^2

Högersidoklasser:

i	r	xr
x	xr^2	r^2

Lagranges sats: Om G är ändlig och H en delgrupp till G gäller

$$|H| \mid |G|.$$

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}, H\text{'s index i } G, \text{ antalet sidoklasser till } H \text{ i } G.$$

Sats: Om G är en grupp med $|G| = n$ gäller

$$o(g) \mid n \text{ och } g^n = 1, \text{ alla } g \in G$$

Sats: En grupp av **primtalsordning** är **cyklisk**, $G = \langle x \rangle$ för alla $x \in G \setminus \{1\}$.

Ex. Normala delgrupper

Definition: Delgruppen N till G kallas en **normal delgrupp** om vänstersidoklasserna = högersidoklasserna, dvs

$$gN = Ng \text{ för alla } g \in G \quad (\text{ekvivalent: } gNg^{-1} = N).$$

(Speciellt är alla delgrupper till en abelsk grupp normala.)

Då är $\mathbf{G/N} = \{gN \mid g \in G\}$ en grupp, **kvotgruppen**,

med operation $g_1N g_2N = \{h_1 h_2 \mid h_1 \in g_1N, h_2 \in g_2N\} = g_1 g_2 N$.

Definition: En funktion $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ kallas en **homomorfi** mellan grupperna $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ omm:

$$\psi(g *_1 g') = \psi(g) *_2 \psi(g') \quad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

(En isomorfi är alltså precis en bijektiv homomorfi.)

Om N är en normal delgrupp till G är $\psi : G \rightarrow G/N$ med $\psi(g) = gN$ en homomorfi.

För varje homomorfi $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ är $N = \psi^{-1}[1_2]$ en normal delgrupp till G_1 och $G_1/N \cong \psi[G_1]$.

Cauchys sats om element av primtalsordning

Sats: Om G är en ändlig grupp, $|G| = n$, och p är en primfaktor i n , finns ett element $g \in G$ av ordning p .

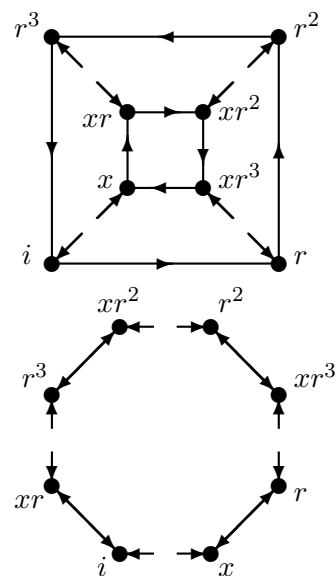
Lite om cayleygrafer (hanns inte på lektionen)

En cayleygraf (eller ett cayleydiagram) för en grupp (egentligen för en framställning av gruppen med generatorer) beskriver gruppen fullständigt.

Grafen har ett hörn för varje element i gruppen och om gruppen genereras av $a, b, \dots$ (dvs om varje $g \in G$ kan skrivas som en produkt av dem och deras inverser) har den riktade kanter av olika typer (eller färger), svarande mot $a, b, \dots$. En a -kant från hörn g slutar i hörn ga osv.

En cayleygraf för $G_{\square}$, kvadratens symmetrigrupp: Gruppen genereras ju av r och x med relationerna $\mathbf{r^4 = x^2 = i, rx = xr^3}$.

Heldragna pilar svarar här mot r , avbrutna mot x . För att t.ex. finna $r^3 \cdot xr^2$ i grafen: gå från hörnet r^3 längs en pilföljd som leder från i till xr^2 , t.ex. x, r, r (eller r, r, x eller r, r, r, x, r), och hamna i resultatet, xr^3 .



Samma grupp kan beskrivas med denna graf:

Här används generatorerna x och y (där $y = xr$) med relationerna $\mathbf{x^2 = y^2 = (xy)^4 = i}$.

Heldragna pilar svarar nu mot y , avbrutna mot x .

Ett sådant diagram med punkter och pilar är en cayleygraf för en grupp precis om:

1. Både till och från varje punkt går precis en pil av varje typ.
2. Om en pilföljd från en punkt leder tillbaks till startpunkten, gör motsvarande pilföljd från en annan punkt också det (t.ex. r, x, r, r, r, x, r, r i den övre grafen).

Man kan välja vilken punkt man vill som enhetselement och beräkna vilka element som svarar mot övriga punkter.