(Diskret matte F, ht17: L12, fr 17 nov 2017)

Mer om $\phi(n)$ och $\mu(n)$

Möbius inversionsformel:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(\tfrac{n}{d}) f(d)$$

speciellt: $\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$

Faltningen $f * g$ av f och g:

$$(f * g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{d|n} f(d) g(\tfrac{n}{d})$$

För alla aritmetiska funktioner f, g, h gäller:

$f * g = g * f$
$(f * g) * h = f * (g * h)$
f, g multiplikativa $\Rightarrow$ $f * g$ multiplikativ

Tidigare resultat kan uttryckas

$$\begin{array}{lll} 1 * \phi = id & \text{där} & \\ 1 * \mu = \delta & 1(n) = 1 \quad \text{och} & \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases} \\ \delta * f = f & id(n) = n & \end{array}$$

Möbius inversionsformel tar formen

$$f = 1 * g \quad \Leftrightarrow \quad g = \mu * f$$

speciellt: $\phi = \mu * id$

En permutation är en bijektion $\pi : X \to X$.

S_n : {alla permutationer av $\mathbb{N}_n$}, $|S_n| = n!$

Om π, σ, $\tau \in S_n$:

$\pi\sigma \in S_n$
$\pi(\sigma\tau) = (\pi\sigma)\tau$
det finns $id \in S_n$ så att $\pi\, id = id\, \pi = \pi$, alla π
det finns $\pi^{-1} \in S_n$ så att $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = id$

Beteckningar:

Tvåradsnotation: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ l & \dots & \dots & j & \dots & i & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Enradsnotation: $\begin{bmatrix} l & \dots & \dots & j & \dots & i & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

Cykelnotation: $(1\, l \dots)(i\, j \dots k) \dots$

Då $\pi(1) = l, \dots, \pi(i) = j, \dots, \pi(k) = i, \dots$

Permutationen $\pi \in S_n$ kan beskrivas med **permutationsmatrisen M_π**, en $(n \times n)$-matris med element $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = \pi(j), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

Det gäller att $M_{\pi\sigma} = M_\pi M_\sigma$, dvs multiplikation i S_n motsvaras precis av matrismultiplikation.

Ordningen för en permutation $\pi \in S_n$ (dvs det minsta $k \geq 1$ så att $\pi^k = id$) är **minsta gemensamma multipeln** av cykellängderna i π.

Permutationer α, $\beta \in S_n$ kallas **konjugerade** om $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ för något $\sigma \in S_n$.

Detta definierar en **ekvivalensrelation** på S_n.

Sats: α och β är konjugerade omm de har **samma cykelstruktur**.

Om α har en cykel $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_k)$ har $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ en cykel $(\sigma(x_1)\, \sigma(x_2)\, \ldots \sigma(x_k))$

Ekvivalensklasser av konjugerade permutationer motsvarar bijektivt **partitioner av** n (inte detsamma som partitioner av mängder), $[1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2}\, \ldots\, k^{\alpha_k}]$, där $n = 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \cdots + k \cdot \alpha_k$

Antalet permutationer av typ $[1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2}\, \ldots\, k^{\alpha_k}]$:

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2}\, \ldots\, k^{\alpha_k}\, \alpha_1!\, \ldots\, \alpha_k!}$$

En **transposition** är en permutation av typ $[1^{n-2}\, 2]$, dvs $\tau = (ab) \in S_n$, $a \neq b$.

För alla $\pi \in S_n : \pi = \tau_r \ldots \tau_2\, \tau_1$, något r och några transpositioner $\tau_1,\, \tau_2,\, \ldots\, \tau_r$.

Sats: Om $\pi = \tau_r \ldots \tau_2\, \tau_1 = \tau'_{r'} \ldots \tau'_2\, \tau'_1$ har r och r' samma paritet, dvs de är båda jämna eller båda udda.
Det minsta möjliga r-värdet är $n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler i π.

Definition: π är en **jämn(/udda) permutation** omm r är jämnt(/udda).

Tecknet (signum) för π, $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^r = \begin{cases} +1 & \pi \text{ jämn} \\ -1 & \pi \text{ udda} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\pi\sigma) &= \operatorname{sgn}\pi\, \operatorname{sgn}\sigma \\ \operatorname{sgn}\pi^{-1} &= \operatorname{sgn}\pi \\ \operatorname{sgn}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}\alpha \end{aligned}$$

Om π är av typ $[1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2}\, \ldots\, k^{\alpha_k}]$ är

$$\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\cdots} = (-1)^{n-c(\pi)},$$

där $c(\pi) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, antalet cykler i π.
En **cykel** är en **jämn** permutation omm den har **udda** längd(!).
En **jämn permutation** är en med ett **jämnt antal** cykler av **jämn längd**.

I S_n $(n \geq 2)$ är hälften av permutationerna jämna, hälften udda.

Om $\boldsymbol{A}$ är en $n \times n$ -matris är

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \ldots a_{\pi(n)n}$$

och (därmed) $\operatorname{sgn}\pi = \det \boldsymbol{M_\pi}$.