(Diskret matte F, ht17: L11, to 16 nov 2017)

Mer kombinatorik

Oordnat val med (möjlig) upprepning

Antalet oordnade val av r st från en n-mängd, med upprepning
= antalet sätt att fördela r st identiska element i n st särskiljbara lådor
= antalet sätt att skriva $r = k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \quad k_i \in \mathbb{N}$
= $\boldsymbol{\binom{n+r-1}{r}} = \boldsymbol{\binom{n+r-1}{n-1}}$

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{k_1} \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{k_2} \mid \underbrace{\quad}_{k_3} \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{k_4} \mid \cdots \mid \underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{k_{n-1}} \mid \underbrace{\quad}_{k_n}$$

Väljer r positioner med $\bullet$, övriga $n-1$ positioner får $|$.

Sammanfattning om val av r st bland n st:

	ordnat	oordnat
med upprepning	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$
utan upprepning	$(n)_r$	$\binom{n}{r}$

Stirlingtalen $S(n,k)$: antalet partitioner av en n-mängd i precis k (icke-tomma) delar.

Rekursivt:

$$\begin{cases} S(n,1) = S(n,n) = 1, \quad 1 \le n \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \quad 1 < k < n \end{cases}$$

"Stirlings triangel":

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & & \\
 & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 & \\
1 & & 63 & & 301 & & 350 & & 140 & & 21 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Om X, Y är ändliga mängder, $|X| = n$, $|Y| = k$:
Sats: Antalet **surjektioner** $f : X \to Y$ är

$$k!\, S(n,k)$$

Belltalet B_n = antalet **ekvivalensrelationer** på X ($|X| = n$) =
= antalet **partitioner** av X =

$$= \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Principen om inklusion och exklusion (sållprincipen)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha_i$$

$$\text{där} \quad \alpha_i = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leq n} |A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_i}|.$$

ex. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$

$$= \underbrace{(|A_1| + |A_2| + |A_3|)}_{\alpha_1} - \underbrace{(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_2} + \underbrace{(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_3}$$

De "talteoretiska" funktionerna $\phi(n)$ och $\mu(n)$

Nedan är alla funktioner **aritmetiska**, dvs funktioner : $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$.

(Behöver inte vara just $\mathbb{C}$, men man måste kunna addera och multiplicera värdena "som vanligt".)

Symbolen $\sum_{d|n}$ betecknar summation över alla **positiva** delare d till n.

Eulers ϕ-funktion: $\phi(n) = |U_n| = |\{x \in \mathbb{N}_n \mid \text{sgd}(x, n) = 1\}|$

Sats: Om $n = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$ ($p_1, \ldots, p_r$ olika primtal, alla $e_i \geq 1$):

$$\phi(n) = n(1 - \tfrac{1}{p_1}) \ldots (1 - \tfrac{1}{p_r}).$$

ϕ är **multiplikativ**, dvs $\text{sgd}(m, n) = 1 \Rightarrow \phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

Sats: $\sum_{d|n} \phi(d) = n$

Möbiusfunktionen $\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & y^2 \mid n, \text{ något } y \geq 2 \\ (-1)^r & n = p_1 p_2 \ldots p_r, \text{ olika primtal} \end{cases}$

Sats: $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$

μ är **multiplikativ** ($\text{sgd}(m, n) = 1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$)

(Mer om $\phi(n)$ och $\mu(n)$ nästa gång.)