(Diskret matte F, ht17: L10, ti 14 nov 2017)

Kombinatorik

Additionsprincipen: Om A, B **ändliga, disjunkta** (dvs $A \cap B = \varnothing$) gäller

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Allmännare: $|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + \cdots + |A_m| \quad$ om $A_i \cap A_j = \varnothing$ då $i \neq j$

Allmän postfacksprincip:

Om $n > q_1 + q_2 + \dots q_m$ och n saker fördelas på m lådor innehåller någon låda, i, minst $q_i + 1$ saker.

(Speciellt om $n > mr$, minst $r + 1$ st i någon låda.)

Lite ramseyteori

Ramseytalet $r(s,t)$: Det minsta antalet element som krävs för att det för varje symmetrisk binär relation på X ska finnas antingen s st element sådana att varje par av dem står i relationen eller t st sådana att inga par av dem gör det. $r(s,t)$ existerar för alla $s, t \in \mathbb{Z}_+$ och $r(s,t) \leq r(s-1,t) + r(s,t-1)$ för alla $s, t \geq 2$, men de är **mycket svåra att finna**.
Utöver att $r(s,t) = r(t,s),\ r(1,t) = 1,\ r(2,t) = t$ för alla $s, t \in \mathbb{Z}_+$ är bara 9 olika värden kända (det största är $r(3,9) = 36$, så svårigheten är inte att de är stora tal).

För $n \in \mathbb{Z}_+$, låt $[A]^n = \{B \mid B \subseteq A, |B| = n\}$, mängden av delmängder av storlek n till mängden A.

Ramseys sats (en oändlig variant):
För alla $n, k \in \mathbb{Z}_+$ gäller att
om $f : [\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}_k$ så finns en oändlig $Y \subseteq \mathbb{N}$ med $f|_{[Y]^n}$ konstant.

Eftersom satsen inte finns med i boken (eller den övriga kurslitteraturen), visar vi den här kortfattat. Beviset görs med induktion över n.
Bas: För $n = 1$ säger satsen att om $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_k (= \{1, 2, \dots, k\})$ är $f^{-1}[\{i\}]$ oändlig för något $i = 1, \dots, k$, vilket är sant ("oändliga postfacksprincipen", $\mathbb{N} = \cup_{i \in \mathbb{N}_k} f^{-1}[\{i\}]$).
Steg: Antag att påståendet är sant för n och att $f : [\mathbb{N}]^{n+1} \to \mathbb{N}_k$.
Låt $a_0 = 0$, $A_0 = \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \setminus \{a_0\}$.
Givet a_i, A_i med A_i oändlig, $a_i < \min A_i$, definiera $g : [A_i]^n \to \mathbb{N}_k$ enligt
$g(X) = f(\{a_i\} \cup X)$ för $X \in [A_i]^n$.
Enligt antagandet finns en oändlig $B_{i+1} \subseteq A_i$ med $g|_{[B_{i+1}]^n} = c_i$, konstant.
Låt a_{i+1} vara minst i B_{i+1}, $A_{i+1} = B_{i+1} \setminus \{a_{i+1}\}$.
Då gäller att $a_{i+1} \in A_i \setminus A_{i+1}$, att $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$, att alla A_i är oändliga och för $X \in [\{a_0, a_1, \dots\}]^{n+1}$ är $f(X) = c_{\min\{i | a_i \in X\}}$.
$c. : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_k$ tar något värde, c^* säg, oändligt många gånger. Låt $Y = \{a_i \mid c_i = c^*\}$.
Då är $f|_{[Y]^{n+1}}$ konstant $(= c^*)$ och steget och därmed beviset är klart. $\square$

Exempel: I varje följd $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ av reella tal finns det en oändlig delföljd $\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ (med $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$) som är en av konvex, linjär och konkav (dvs för alla $s, t, u \in \mathbb{N}$, $s < t < u$ ligger (t, a_{i_t}) över, på eller under den räta linjen genom (s, a_{i_s}) och (u, a_{i_u})). Följer från Ramseys sats med $n = 3$.

Produktmängden $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Sats: Om $S \subseteq X \times Y$, $\quad X, Y$ ändliga,

$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$

$|X \times Y| = |X||Y|$ **multiplikationsprincipen**

där **radsumman** $r_x(S) = |\{y \in Y \mid (x, y) \in S\}|$
och **kolumnsumman** $c_y(S) = |\{x \in X \mid (x, y) \in S\}|$

Om X, Y är ändliga mängder, $|X| = m, |Y| = n$:

Sats: Antalet funktioner $f : X \to Y$

$=$ antalet element i $Y^m = Y \times Y \times \cdots \times Y$ (m st)

$=$ antalet ord av längd m i Y

$=$ antalet **ordnade val med upprepning** av m st ur Y

$= n^m = |Y|^{|X|}$

Sats: Antalet injektioner $f : X \to Y$

$=$ antalet ord av längd m i Y utan upprepning

$=$ antalet **ordnade val utan upprepning** av m st ur Y

$= n(n-1)\dots(n-m+1) = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Definition: **Binomialtalet** $\binom{n}{r}$, (läses "n över r")

$=$ antalet r-delmängder till Y

$=$ antalet **oordnade** val av r st från Y, **utan upprepning**

Rekursivt:

$$\begin{cases} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, & 0 < r < n \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \end{cases}$$

Pascals triangel:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \\
&&&&&&\vdots&&&&&&
\end{array}$$

Sats: $\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Binomialsatsen: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Multinomialtal:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \qquad n_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

$=$ antalet sätt fördela n st (olika) element i k (olika) lådor, med n_i st i låda i

$=$ antalet funktioner $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_k$ som antar värdet i precis n_i gånger

Multinomialsatsen:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\sum n_i = n,\ n_i \geq 0} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$