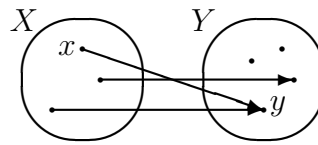


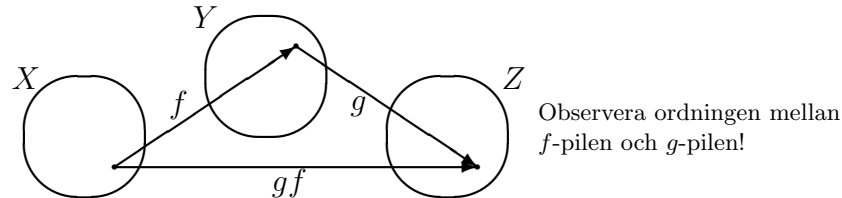
Funktioner, avbildningar

$$f : X \rightarrow Y, \quad y = f(x)$$



Sammansättning av funktioner

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z \quad \text{ger} \quad gf : X \rightarrow Z, \quad (gf)(x) = g(f(x))$$



$f : X \rightarrow Y$ är en

surjektion omm $f(x) = y$ har **minst en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$

injektion omm $f(x) = y$ har **högst en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$

bijektion omm $f(x) = y$ har **exakt en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$

De kan betecknas $f : X \twoheadrightarrow Y$, $f : X \hookrightarrow Y$ respektive $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Sats: Sammansättning av två α jektioner ger en α jektion ($\alpha = \text{sur}, \text{in}, \text{bi}$).

$g : Y \rightarrow X$ är en **inversfunktion** f^{-1} till $f : X \rightarrow Y$ omm $fg = id_Y, gf = id_X$

Sats: $f : X \rightarrow Y$ är inverterbar omm f är en bijektion

$$f^{-1} \text{ är då också en bijektion och } (f^{-1})^{-1} = f.$$

Postfacksprincipen:

Om $|X| > |Y|$, finns **ingen injektion** $X \rightarrow Y$

”Om $n > m$ och n saker läggs i m lådor, får minst en låda minst två saker.”

Kardinalitet:

Att mängden X har n element, skrivet $|X| = n$, betyder att

det finns en bijektion $f : \mathbb{N}_n \xrightarrow{\sim} X$ ($\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ och $[0] = \emptyset$).

Allmänt har mängderna X och Y **samma kardinalitet**, $|X| = |Y|$, omm det finns en **bijektion** $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Att X är **uppräknelig** betyder att det finns en bijektion $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X$,

dvs $|X| = |\mathbb{N}| (= \aleph_0 \text{ (”alef-noll”, namnet på det minsta oändliga kardinaltalet)})$.

$|X| \leq |Y|$ omm det finns $f : X \hookrightarrow Y$; $|X| < |Y|$ omm $|X| \leq |Y|$ och $|X| \neq |Y|$.

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$, dvs $\mathbb{Q}$ (mängden av de rationella talen) är uppräknelig, men $\mathbb{R}$ (mängden av de reella talen) är **oändlig** men **inte uppräknelig** (överuppräknelig).

Sats: (Cantor) För alla mängder X gäller att $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

($\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$, **potensmängden** till X .)

Sats: (Cantor-Bernstein (/ Schröder-Bernstein)) För alla mängder X, Y gäller att

$$|X| \leq |Y| \text{ och } |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|.$$

Den underlättar beviset av $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ och $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$ något.

(V , ”mängden av alla mängder”, **finns inte** (om $\{x \in M \mid Px\}$ är en mängd för varje mängd M och ”egenskap” (enställt predikat) P), ty $R = \{x \in V \mid x \notin x\}$ ger $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ (Russells paradox).)