(Diskret matte F, ht17: L7, to 9 nov 2017)

"Vanlig induktion" över $\mathbb{N}$:

Om $M \subseteq \mathbb{N}$ och $\begin{cases} 0 \in M, \\ n \in M \Rightarrow n+1 \in M, \text{ för alla } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ så $M = \mathbb{N}$.

"Stark induktion" över $\mathbb{N}$:

Om $M \subseteq \mathbb{N}$ och $\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq M \Rightarrow n \in M$ för alla $n \in \mathbb{N}$, så $M = \mathbb{N}$.

De två "typerna" är ekvivalenta.

Oftast används endera för att visa att ett påstående $P(n)$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$ (eller alla $n \in \mathbb{Z}$ med $n \geq$ något $n_0 \in \mathbb{Z}$), då med $M = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$.

Nedanstående är enligt materialet "Om induktion och rekursion".

Definition: Relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{D}$ är **välgrundad** (eng. **well-founded**) omm
för alla $\boldsymbol{A \subseteq \mathcal{D}}$, $\boldsymbol{A \neq \varnothing}$, finns $\alpha \in A$ som är **$\boldsymbol{\mathcal{R}}$-minimalt i $\boldsymbol{A}$**
(dvs sådant att $\xi \mathcal{R} \alpha \Rightarrow \xi \notin A$).

En **välordning** (eng. **well-order**) är detsamma som en välgrundad totalordning.

Definition: Mängden $M \subseteq \mathcal{D}$ kallas **$\boldsymbol{\mathcal{R}}$-induktiv** omm
för alla $\boldsymbol{\alpha \in \mathcal{D}}$: $\boldsymbol{\mathcal{R}\alpha \subseteq M \Rightarrow \alpha \in M}$, $(\boldsymbol{\mathcal{R}\alpha = \{\xi \in \mathcal{D} \mid \xi \mathcal{R} \alpha\}})$
dvs omm **$\boldsymbol{M}$:s komplement** saknar **$\boldsymbol{\mathcal{R}}$**-minimalt element.

Sats: $\mathcal{R}$ är välgrundad omm $\mathcal{D}$ är $\mathcal{D}$:s **enda $\boldsymbol{\mathcal{R}}$-induktiva** delmängd.

Sats ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$-induktion): Om $\mathcal{R}$ är välgrundad **och** för alla $\alpha \in \mathcal{D}$:
($P\beta$ för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$) $\Rightarrow P\alpha$ **så** är $P\alpha$ sann för alla $\alpha \in \mathcal{D}$.
Då man skall visa $P\alpha$ för godtyckliga $\alpha \in \mathcal{D}$, kan man alltså förutsätta $P\beta$ för alla $\beta \in \mathcal{R}\alpha$.

Låt $g(\alpha, h_\alpha)$ vara definierad för $\alpha \in \mathcal{D}$ och $h_\alpha : \mathcal{R}\alpha \to Y$ (där Y är någon mängd).

Definition: $f : \mathcal{D} \to Y$ är **$\boldsymbol{\mathcal{R}}$-rekursiv** (med g) omm för alla $\alpha \in \mathcal{D}$
$\boldsymbol{f(\alpha) = g(\alpha, f|_{\mathcal{R}\alpha})}$.
($f|_{\mathcal{R}\alpha} : \mathcal{R}\alpha \to Y$ är **restriktionen** av f till $\mathcal{R}\alpha$, definierad av att $f|_{\mathcal{R}\alpha}(\xi) = f(\xi)$, alla $\xi \in \mathcal{R}\alpha$.)

Sats ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$-rekursion): Om $\mathcal{R}$ är välgrundad finns **precis en** $\mathcal{R}$-rekursiv (med g) funktion på $\mathcal{D}$.

Definition: En mängd $\mathcal{K}$ är en **konstruktormängd på mängden $\boldsymbol{X}$** omm varje $k \in \mathcal{K}$ är en n_k-ställig funktion, $k : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n_k \text{ st}} \to X$, för något $n_k \in \mathbb{N}$.

Definition: Om X är en mängd och $\mathcal{K}$ en kontruktormängd på X,
definieras $\boldsymbol{\mathcal{D} \subseteq X}$ rekursivt av $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ omm
$\mathcal{D}$ är den minsta (dvs är innehållen i alla andra sådana) mängd som uppfyller

- för alla $k \in \mathcal{K}$ och $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k}) \in \mathcal{D}^{n_k}$ gäller $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k}) \in \mathcal{D}$,

dvs **$\boldsymbol{\mathcal{D}}$ är sluten under verkan av alla $\boldsymbol{k \in \mathcal{K}}$** ($k|_{\mathcal{D}^{n_k}}$ tar bara värden i $\mathcal{D}$).

Sats: Varje konstruktormängd $\mathcal{K}$ på en mängd X
definierar rekursivt precis en mängd $\mathcal{D} \subseteq X$.

Definition:
En partialordnad mängd $(S, \preccurlyeq)$ kallas ett **fullständigt** (eng. complete) **lattice** omm varje $T \subseteq S$ har ett **supremum** $\bigvee T$ och ett **infimum** $\bigwedge T$, dvs

- för alla $t \in T$: $\bigwedge T \preccurlyeq t \preccurlyeq \bigvee T$,
- för alla $s \in S$: ($s \preccurlyeq t$ för alla $t \in T$) $\Rightarrow s \preccurlyeq \bigwedge T$,
- för alla $s \in S$: ($t \preccurlyeq s$ för alla $t \in T$) $\Rightarrow \bigvee T \preccurlyeq s$.

Sats (Tarski-Knasters fixpunktssats):
I ett **fullständigt** lattice $(S, \preccurlyeq)$ med en **ordningbevarande** $g : S \to S$ (dvs $s_1 \preccurlyeq s_2 \Rightarrow g(s_1) \preccurlyeq g(s_2)$, alla $s_1, s_2 \in S$) har g en **minsta fixpunkt** ($s \in S$ med $g(s) = s$).

Sats (induktion på en rekursivt definierad mängd):
Om konstruktormängden $\mathcal{K}$ på X rekursivt definierar $\mathcal{D} \subseteq X$ och för alla $k \in \mathcal{K}$ och $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k} \in X$: $\boldsymbol{(P\alpha_i \text{ för } i = 1, \ldots, n_k) \Rightarrow Pk(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k})}$, så är $\boldsymbol{P\alpha}$ **sann för alla** $\boldsymbol{\alpha \in \mathcal{D}}$.

Definition:
$\mathcal{D}$ **definieras entydigt rekursivt** av konstruktormängden $\mathcal{K}$ på X omm

- $\mathcal{D}$ definieras rekursivt av $\mathcal{K}$ och
- det för varje $\alpha \in \mathcal{D}$ finns **precis ett** $k \in \mathcal{K}$ och **ett** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k}) \in \mathcal{D}^{n_k}$ med $\alpha = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k})$.

Sats (rekursion på en entydigt rekursivt definierad mängd): Om $\mathcal{D}$ är **entydigt rekursivt definierad** av konstruktormängden $\mathcal{K}$ på X och $\boldsymbol{g_k : \mathcal{D} \times Y^{n_k} \to Y}$ för varje $k \in \mathcal{K}$, finns **precis en** $\boldsymbol{f : \mathcal{D} \to Y}$ med
$\boldsymbol{f(\alpha) = g_k(\alpha, f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{n_k}))}$ **för alla** $\boldsymbol{\alpha = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k}))}$.

Lite om satslogik

Låt $\mathcal{L}$ vara en mängd enkla symboler, de **atomära satslogiska sentenserna** (tänkta att representera enkla utsagor) $(\bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow \notin \mathcal{L})$.

Definition:
Mängden av (satslogiska) sentenser över $\mathcal{L}$ definieras rekursivt av

(1) Om $p \in \mathcal{L}$, är p en sentens.
(2) $\bot$ är en sentens.
(3) Om p är en sentens, är $\neg p$ en sentens.
(4) Om p, q är sentenser, är $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \leftrightarrow q)$ sentenser.
(5) Varje sentens är en ändlig sträng av symboler som kan visas vara en sentens genom att använda (1)–(4) ett ändligt antal gånger.

$\bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ kallas **konnektiv**.
$\bot$ kallas **falsum** (tolkas som ett alltid falskt påstående), ett **0-ställigt konnektiv**.

Sanningsvärden: 1 för **sant**, 0 för **falskt**.

En **tolkning** av ett satslogiskt språk är en funktion $v : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$.

Betydelsen av de olika konnektiven beskrivs med tabeller:

$\bot$
0

'falsum'

p	$\neg p$
1	0
0	1

'inte'

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1
		'och'	'eller'	'medför'	'omm'
		'men'		'bara om'	

p och q står här för godtyckliga sentenser, så **sanningsvärden** i en given tolkning definieras **rekursivt för alla sentenser**.

På Knarrön är var och en av invånarna kung eller narr. Kungar talar alltid sanning, narrar ljuger alltid.

Se i "Om induktion och rekursion" om detta och om **Yablos paradox**.