

Lite om mängder (eng. sets)

Vi kan tänka på **mängder** som "påsar" med "saker" (eller pekare till saker) i. "Sakerna" (som också kan vara mängder) kallas mängdens **element**.

Två mängder är lika precis om de innehåller samma element.

$\{\pi, \sqrt{2}\}$ är mängden med elementen π och $\sqrt{2}$.

$\{x \mid Px\}$ är mängden av x med egenskapen P , ex. $\{n \mid n \text{ heltal}, n^2 \equiv_5 2\}$.

Den tomma mängden $\emptyset = \{x \mid x \neq x\} = \{\}$, "en tom påse".

Obs att $\{\emptyset\}$, med ett element ($\emptyset$), inte är samma mängd som $\emptyset$, utan element.

Universum $\mathcal{U}$, den grundmängd vi sysslar med.

Standardbeteckningar för olika talmängder: $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{A}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_m$.

Viktiga relationer och operationer på mängder:

$a \in A$ a är ett **element** i A ($a \notin A$: a är **inte** ett element i A)

$B \subseteq A$ B är en **delmängd** till A , dvs $x \in B \Rightarrow x \in A$, för alla x

$B \subset A$ B är en **äkta** delmängd till A , dvs $B \subseteq A$ och $B \neq A$

$|A|$ antalet element i A , A 's **kardinalitet**

$A \cup B$ **unionen** av A och B , $\{x \mid \text{minst en av } x \in A, x \in B\}$

$A \cap B$ **snittet**, ä.k. **skärningen**, av A och B , $\{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$

$A \setminus B$ **differensen** mellan A och B , $\{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$

A^c **komplementet** till A , $\mathcal{U} \setminus A$

$\mathcal{P}(A)$ A 's **potensmängd** (eng. **power set**), mängden av delmängder till A ,
 $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

$A \times B$ **produktmängden** av A och B , $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$,
där (a, b) är det **ordnade paret** av a och b .

Räkneregler, boolesk algebra för $\cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathcal{U}$:

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	kommutativitet
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	associativitet
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivitet
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	DeMorgan
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	idempotens
$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	absorption
$(A^c)^c = A$		involution
$A \setminus B = A \cap B^c$		$\setminus$ uttryckt
$A \cap A^c = \emptyset$	$A \cup A^c = \mathcal{U}$	komplementaritet
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	
$A \cap \mathcal{U} = A$	$A \cup \emptyset = A$	

Reglerna kan visas med **Venn-diagram** (viktiga, men svåra att rita här) eller genom att resonera utgående från definitionerna.

Ovanstående hör till det som brukar kallas **mängdlära**, studiet av definitioner och egenskaper för mängder och operationer på dem. Längre fram kommer vi att tala lite om **mängdteori**, som till stor del är studiet av oändligheter.

Relationer

Att $\mathcal{R}$ är en **binär relation** på mängden X betyder att (för alla $a, b \in X$) $a\mathcal{R}b$ är ett påstående, som kan vara **sant eller falskt**.

Relationen $\mathcal{R}$ kan beskrivas med

- En **delmängd** till $X^2 = X \times X$, $\{(a, b) \in X^2 \mid a\mathcal{R}b\}$,
formellt: $\mathcal{R} \subseteq X \times X$, dvs $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(X \times X)$
- En **graf** med punkter svarande mot elementen i X och
en pil från a till b precis om $a\mathcal{R}b$
- En **matris** med rader och kolonner svarande mot X :s element,
1 i position ab om $a\mathcal{R}b$, 0 om $a\not\mathcal{R}b$ (dvs inte $a\mathcal{R}b$)

Viktiga **egenskaper** för binära relationer:

$\mathcal{R}$ är reflexiv omm	$x\mathcal{R}x$ för alla $x \in X$
$\mathcal{R}$ är irreflexiv omm	$x\not\mathcal{R}x$ för alla $x \in X$
$\mathcal{R}$ är symmetrisk omm	$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ för alla $x, y \in X$
$\mathcal{R}$ är antisymmetrisk omm	$x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ för alla $x, y \in X$
$\mathcal{R}$ är transitiv omm	$x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$

En **ekvivalensrelation** på en mängd X är en binär relation $\mathcal{R}$ som är
reflexiv, symmetrisk och transitiv.

En ekvivalensrelation delar in X i disjunkta **ekvivalensklasser** av element som står i relationen till varandra: $\mathcal{C}_x = [x] = \{y \in X \mid y\mathcal{R}x\}$.

Omvänt finns för varje partition av en mängd X en ekvivalensrelation på X som har partitionens delar som ekvivalensklasser.

En icke-strikt **partialordning** är en binär relation $\preceq$ på en mängd X som är
reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Motsvarande strikta partialordning $\prec$ ges av $x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ och } x \neq y)$.

En binär relation på en mängd X är en strikt partialordning precis om den är
irreflexiv och transitiv.

Om $\prec$ är en partialordning på mängden X och $a \in A \subseteq X$ är a

ett **minimalt** element i A omm det inte finns $x \in A$ med $x \prec a$

ett **minsta** element i A omm $a \preceq x$ för alla $x \in A$,

motsvarande för **maximala** och **största** element.

Om $x, y, z \in X$ och $z \preceq x$, $z \preceq y$ kallas z en **undre begränsning** till x , y ,
motsvarande för **övre begränsning**.

Om $\preceq$ betecknar $\mid$, delbarhet, betyder undre begränsning alltså gemensam delare. För godtyckliga $\preceq$ behöver det inte för alla x, y finnas någon **största** undre begränsning (motsvarande sgd).

En partialordning $\preceq$ kallas en **totalordning** (en linjär ordning) omm för alla $x, y \in X$:

$$x \preceq y \text{ eller } y \preceq x.$$

(eller, ekvivalent, exakt en av : $x \prec y$, $x = y$, $y \prec x$.)

För totalordningar är minimalt element detsamma som minsta element.

En **välordning** av en mängd X (ex. $<$ på $\mathbb{N}$) är en totalordning $<$, sådan att varje $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, har ett **minsta** element (men inte säkert något största).

Om $(A, <_A)$ och $(B, <_B)$ är välordnade mängder, $A \cap B = \emptyset$, kan vi definiera **summan** och **produkten** av dem enligt:

$(A, <_A) + (B, <_B)$ är den välordnade mängden $(A \cup B, <)$, med

$$x < y \text{ omm } \begin{cases} x \in A \text{ och } y \in B \text{ eller} \\ x, y \in A \text{ och } x <_A y \text{ eller} \\ x, y \in B \text{ och } x <_B y, \end{cases}$$

dvs "först A , sedan B ".

$(A, <_A) \cdot (B, <_B)$ är den välordnade mängden $(A \times B, <)$, med

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \text{ omm } \begin{cases} b_1 <_B b_2 \text{ eller} \\ b_1 = b_2 \text{ och } a_1 <_A a_2, \end{cases}$$

s.k. "omvänd lexikografisk ordning".

Ordinaltal

Man kan **definiera** de naturliga talen som mängder (kallade ordinaltal (eng. ordinals)) enligt $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, dvs

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$$

för varje tal n fås dess **efterföljare** (eng. successor) som $n \cup \{n\} (= n+1)$.

Det är naturligt att fortsätta till **transfinita ordinaltal**,

$$\omega = \{0, 1, \dots\} (= \mathbb{N}),$$

$$\omega + 1 = \{0, 1, \dots, \omega\},$$

$$\omega + 2 = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1\},$$

$\vdots$

$$\omega + \omega = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots\} = \omega \cdot 2,$$

$$\omega \cdot 2 + 1 = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2\},$$

$\vdots$

$$\omega \cdot \omega = \omega^2,$$

$\vdots$

$$\omega^\omega,$$

$\vdots$

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} (= \omega^{\varepsilon_0})$$

För α, β ordinaltal ($\alpha, \beta \in \mathcal{O}$) **definieras** $\alpha < \beta$ som $\alpha \subset \beta$. För de ändliga ordinaltalen stämmer det tydligen med den vanliga betydelsen. Varje ordinaltal är mängden av alla mindre ordinaltal, så $\alpha \subset \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$.

Vi skall längre fram ge en ordentlig definition av ordinaltal och då se att alla ordinaltal är välordnade mängder och att varje välordnad mängd är "samma" ordnade mängd som precis ett ordinaltal.