

Uppgiften om kaniner och morötter, med lösning

De sju syskonen kanin skall dela på ett antal morötter.

Då rotsakerna fördelats på sju lika högar är 5 morötter över. Dem äter storasyster kanin upp och sedan somnar hon.

Sex vakna kaniner delar rötterna från de sju högarna i sex lika högar. Storebror äter upp de 4 som nu blev över – och somnar.

Fem vakna kaniner delar de sex högarna i fem lika högar, 3 morötter blir över. Hur många var det från början, om det var färre än 300 stycken?

Lösningar:

Låt antalet morötter vara x .

Vid delning på 7 lika högar blev 5 över, så $x \equiv_7 5$.

Då alla utom de 5 uppatna delas på 6 lika högar blir 4 över, så $x - 5 \equiv_6 4$, dvs $x \equiv_6 9 \equiv_6 3$.

Då alla utom de totalt 9 uppatna delas på 5 lika högar blir 3 över, så $x - 9 \equiv_5 3$, dvs $x \equiv_5 12 \equiv_5 2$.

$$\text{Så: } \begin{cases} x \equiv 5 & (\text{mod } 7), \\ x \equiv 3 & (\text{mod } 6), \\ x \equiv 2 & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

Eftersom 5, 6, 7 är relativt prima och $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, bestämmer dessa villkor x entydigt mod 210 (kinesiska restsatsen).

$13 \cdot 7 + (-3) \cdot 30 = 1$, så $-90 \equiv_7 1, \equiv_6 0, \equiv_5 0$,

$6 \cdot 6 - 35 = 1$, så $-35 \equiv_7 0, \equiv_6 1, \equiv_5 0$ och

$(-25) \cdot 5 + 3 \cdot 42 = 1$, så $126 \equiv_7 0, \equiv_6 0, \equiv_5 1$.

(Fås med provning eller med Euklides algoritm.)

Således är $x \equiv_{210} 5 \cdot (-90) + 3 \cdot (-35) + 2 \cdot 126 = -303 \equiv_{210} 117$.

Det enda positiva sådana $x < 300$ är 117, så **det fanns 117 morötter**.

Alternativt (kortare då vi bara löser systemet för en uppsättning HL),

$x \equiv_7 5 \Leftrightarrow x = 5 + 7s, s \in \mathbb{Z}$ och med det är

$x \equiv_6 3 \Leftrightarrow 5 + 7s \equiv_6 3 \Leftrightarrow s \equiv_6 -2 \Leftrightarrow s = 4 + 6t, t \in \mathbb{Z}$, så

$x = 5 + 7(4 + 6t) = 33 + 42t, t \in \mathbb{Z}$ och med det är

$x \equiv_5 2 \Leftrightarrow 33 + 42t \equiv_5 2 \Leftrightarrow 2t \equiv_5 -31 \equiv_5 4 \Leftrightarrow t \equiv_5 2 \Leftrightarrow t = 2 + 5n, n \in \mathbb{Z}$

(vid det tredje $\Leftrightarrow$ har använts att $\text{sgd}(2,5)=1$, så 2 är inverterbart i $\mathbb{Z}_5$),

så alla lösningar ges av $x = 33 + 42(2 + 5n) = 117 + 210n, n \in \mathbb{Z}$ etc.