

Övning 7, on 13 december 2017 svar och ledningar

1. En möjlighet är $f(x) = x_a a$, a -komponenten för x i en hamelbas.
(Låt H vara en bas för vektorrummet $\mathbb{R}$ med skalärer $\mathbb{Q}$ (en hamelbas) och $a \in H$.
Det betyder att det för varje $x \in \mathbb{R}$ finns entydiga $\{x_h\}_{h \in H}$, alla $x_h \in \mathbb{Q}$ och bara ändligt många $x_h \neq 0$, sådana att $x = \sum_{h \in H} x_h h$. (Se bladen om urvalsaxiomet.)
 f är då $\mathbb{Q}$ -linjär: om $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, $x, y \in \mathbb{R}$ och $z = \lambda x + \mu y$ är $z_h = \lambda x_h + \mu y_h$ (alla $h \in H$), så $f(z) = z_a a = (\lambda x_a + \mu y_a) a = \lambda f(x) + \mu f(y)$,
men inte $\mathbb{R}$ -linjär, eftersom $f[\mathbb{R}] = a \cdot \mathbb{Q}$ (varken $\{0\}$ eller $\mathbb{R}$).
Varje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är $\mathbb{Q}$ -linjär men inte $\mathbb{R}$ -linjär har en graf som är tät i $\mathbb{R}^2$ och är därmed inte kontinuerlig för något $x \in \mathbb{R}$ (för alla $x \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ finns då $y \in \mathbb{R}$ med $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)|$ godtyckligt stor):
Det finns (f inte $\mathbb{R}$ -linjär) $x, y \in \mathbb{R}$ med $\{(x, f(x)), (y, f(y))\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$ (över $\mathbb{R}$), så $\{(\lambda x + \mu y, f(\lambda x + \mu y)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Q}\} = \{\lambda(x, f(x)) + \mu(y, f(y)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Q}\}$ (f $\mathbb{Q}$ -linjär) är tät i $\mathbb{R}^2$.)
2. Samma f som i uppgift 1 fungerar.
(Om $b \in H$, $b \neq a$ är $f(b) = 0$, så $f(x + \lambda b) = f(x) + \lambda f(b) = f(x)$ för alla $\lambda \in \mathbb{Q}$.
Dessutom är $g(x) = x - f(x)$ λa -periodisk för alla $\lambda \in \mathbb{Q}$, ty $f(a) = a$ ger $g(x + \lambda a) = x + \lambda a - f(x + \lambda a) = g(x)$, så **$id_{\mathbb{R}}$ är summan av två periodiska funktioner.**)
3. (p och Γ har samma modeller, så $\Gamma \cup \{\neg p\}$ saknar modeller. Enligt kompakthets-satsen finns en ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$ sådan att $\Gamma' \cup \{\neg p\}$ saknar modeller, dvs $\Gamma' \models p$, varje modell för Γ' är en modell för p . Enligt förutsättning är varje modell för p en modell för Γ , speciellt för delmängden Γ' . p och Γ' har alltså precis samma modeller.
Om $\Gamma' = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ gäller alltså $p \equiv q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n$ (att en struktur är en modell för Γ' betyder ju att den satisfierar alla sentenser i Γ' och därmed konjunktionen av dem).)
4. (Varje modell för p satisfierar minst en sentens i Γ . Låt $(\neg)\Gamma = \{\neg q \mid q \in \Gamma\}$.
Då gäller att $\{p\} \cup (\neg)\Gamma$ saknar modeller. Enligt kompakthetssatsen finns alltså en ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$ sådan att $\{p\} \cup (\neg)\Gamma'$ saknar modeller. Det innebär att varje modell för $\{p\}$ satisfierar minst en sentens i Γ' , som önskat. Med $\Gamma' = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ gäller alltså $\models p \rightarrow (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n)$.)
5. (Γ och Δ saknar gemensamma modeller, så $\Sigma = \Gamma \cup \Delta$ saknar modeller. Enligt kompakthetssatsen finns en ändlig $\Sigma' \subseteq \Sigma$ som saknar modeller. Med $\Gamma' = \Sigma' \cap \Gamma$ och $\Delta' = \Sigma' \cap \Delta$, är $\Gamma' \subseteq \Gamma$ och $\Delta' \subseteq \Delta$ ändliga och $\Gamma' \cup \Delta' = \Sigma'$, så Γ' och Δ' saknar gemensamma modeller. Varje modell för Γ är en modell för dess delmängd Γ' och varje modell för Δ är en modell för Δ' . Å andra sidan är varje modell för Γ' en modell för Γ , ty om en struktur inte är en modell för Γ är den en modell för Δ (enligt förutsättning) och därmed för Δ' , således inte för Γ' . Γ' har alltså samma modeller som Γ och på samma sätt ses att Δ' har samma modeller som Δ .)

6. (Låt $\mathfrak{c} (= 2^{\aleph_0})$ vara kardinaliteten för $\mathbb{R}$ och därmed för mängden av linjer i planet (eftersom $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$, $|\text{linjerna}| \geq |\mathbb{R}|$ och parametriseringen $ax + by = c$ visar $|\text{linjerna}| \leq |\mathbb{R}^3|$).

Tag en välordning (urvalsaxiomet!) $\{\ell_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}}$ av alla linjer i planet.

Idén är att definiera en växande följd mängder $A_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha < \mathfrak{c}$, så att för alla $\alpha < \mathfrak{c}$:

1. $|A_\alpha \cap \ell_\beta| = 2$ för alla $\beta < \alpha$, 2. $|A_\alpha \cap \ell| \leq 2$ för alla linjer ℓ och 3. $|A_\alpha| < \mathfrak{c}$.

Då har $A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha$ den önskade egenskapen.

$\{A_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}}$ kan definieras rekursivt enligt

- $A_0 = \emptyset$,
- $A_{S(\alpha)} = \begin{cases} A_\alpha & \text{om } |A_\alpha \cap \ell_\alpha| = 2, \\ A_\alpha \cup \{p_\alpha\} & \text{om } |A_\alpha \cap \ell_\alpha| = 1, \text{ där } p_\alpha \in \ell_\alpha \setminus A_\alpha \text{ och} \\ & \text{ingen linje } \ell \text{ genom } p_\alpha \text{ har } |A_\alpha \cap \ell| = 2, \\ A_\alpha \cup \{p_\alpha, p'_\alpha\} & \text{om } A_\alpha \cap \ell_\alpha = \emptyset, \\ & \text{där } p_\alpha, p'_\alpha \in \ell_\alpha \setminus A_\alpha, p_\alpha \neq p'_\alpha \text{ och ingen} \\ & \text{linje } \ell \text{ genom } p_\alpha \text{ eller } p'_\alpha \text{ har } |A_\alpha \cap \ell| = 2, \end{cases}$
- $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ om α är ett gränsordinaltal, dvs $\alpha = \bigcup \alpha$.

Egenskaperna 1.–3. ovan bevaras tydligen i alla tre fallen (3. i det tredje fallet eftersom A_α då är en union av $< \mathfrak{c}$ st A_β med $|A_\beta| < \mathfrak{c}$ (däremot har $A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha$ kardinalitet $\mathfrak{c}$, eftersom den innehåller två punkter var i de disjunkta linjerna $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$)).

Med induktion över α fås att 1.–3. gäller för alla $\alpha < \mathfrak{c}$.

Hur vet man då att p_α, p'_α vid den andra punkten ovan finns (det är tydligen det centrala i konstruktionen)? Jo, eftersom $|A_\alpha| < \mathfrak{c}$ går $< \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ linjer genom två punkter i A_α , så ℓ_α skär sådana i $< \mathfrak{c}$ punkter. p_α och (ev.) p'_α väljs bland övriga punkter på ℓ_α .)

7. (Som i uppgift 6, tag en välordning $\{\mathbf{a}_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}}$ av $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ och konstruera en växande följd $A_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha < \mathfrak{c}$, så att för alla $\alpha < \mathfrak{c}$:

1. $|A_\alpha \cap (A_\alpha + \mathbf{a}_\beta)| = 1$ då $\beta < \alpha$, 2. $|A_\alpha \cap (A_\alpha + \mathbf{a}_\beta)| \leq 1$ då $\beta < \mathfrak{c}$ och 3. $|A_\alpha| < \mathfrak{c}$.

Då har $A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha$ den önskade egenskapen.

A_α definieras rekursivt, liknande i 6.

I andra punkten sätts $A_{S(\alpha)}$ till A_α (om $|A_\alpha \cap (A_\alpha + \mathbf{a}_\alpha)| = 1$) eller (om $|A_\alpha \cap (A_\alpha + \mathbf{a}_\alpha)| = 0$) $A_\alpha \cup \{p_\alpha, q_\alpha\}$, där $p_\alpha, q_\alpha \in \mathbb{R}^2 \setminus A_\alpha$, $q_\alpha = p_\alpha + \mathbf{a}_\alpha$ och alla vektorer mellan par av punkter i $A_\alpha \cup \{p_\alpha, q_\alpha\}$ är olika (att det är möjligt måste förstås visas.)

8. (Välordna som ovan $\mathbb{R}^2$ med $\{p_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}}$ och $[0, \pi[$ (linjernas riktningar) med $\{v_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}}$ och konstruera en växande följd L_α av mängder av linjer i planet, så att för $\alpha < \mathfrak{c}$:

1. L_α har precis två linjer genom p_β och precis en linje i riktning v_β , alla $\beta < \alpha$,

2. L_α har högst två linjer genom p_β och högst en linje i riktning v_β , alla $\beta < \mathfrak{c}$,

3. $|L_\alpha| < \mathfrak{c}$.

Då har $L = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} L_\alpha$ de önskade egenskaperna (och $|L| = \mathfrak{c}$, ty linjer i alla riktningar v_α).

L_α definieras rekursivt som ovan. För $L_{S(\alpha)}$: linjerna i L_α har $< \mathfrak{c}$ skärningspunkter, så välj (vid behov) ny(a) linje(r) genom p_α som undviker dem och (vid behov) en linje i riktning v_α som undviker alla skärningspunkter mellan linjer i $L_\alpha \cup$ (ev.) ny(a).)

9. (Nedan betyder "cirkel" alltid "plan cirkel med radie 1".

Låt $\{p_\alpha\}_{\alpha < \mathfrak{c}}$ vara en välordning av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ och konstruera en växande följd C_α av mängder av cirklar, sådana att för $\alpha < \mathfrak{c}$:

1. Alla cirklar i C_α är disjunkta och $p_\beta \in \bigcup C_\alpha$ för alla $\beta < \alpha$ och 2. $|C_\alpha| < \mathfrak{c}$.

Då är $C = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} C_\alpha$ en mängd cirklar av den sökta typen (med $|C| = \mathfrak{c}$).

Rekursion som i uppgifterna ovan, men för $C_{S(\alpha)}$ gäller det att (om $p_\alpha \notin \bigcup C_\alpha$) visa att det finns en cirkel genom p_α som är disjunkt med alla cirklar i C_α .

Tag ett plan genom p_α som inte är parallellt med någon av de $< \mathfrak{c}$ cirkarna i C_α .

Det har $< \mathfrak{c}$ skärningspunkter med $\bigcup C_\alpha$ (varje C_α -cirkel skär det i högst två punkter), så det finns en cirkel genom p_α i planet som inte innehåller någon av punkterna i $\bigcup C_\alpha$.)