

Övning 6, må 11 december 2017 svar och ledningar

- 1, 2 eller $v + 2$. (Låt grafen vara k -reguljär och antalet ytor vara r . Då är k jämnt (eulersk graf), $k \leq 4$ (plan graf, så något hörn har valens ≤ 5).
 $k = 0$: $r = 1$ (grafens alla hörn är isolerade, bara en yta).
 $k = 2$: en cykelgraf (eulersk (och inga hörn med valens 0), så sammanhängande), så $r = 2$.
 $k = 4$: $|E| = e = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \delta(x) = 2v$, så enligt Euler $2 = v - e + r = -v + r$ och $r = v + 2$.)
- (G har ett jämnt antal udda hörn ("handslagslemmat"). Låt G' vara G med ett nytt hörn som är granne med alla G 's udda hörn. G' 's alla hörn är jämna, så enligt Euler har varje komponent i G' en eulerkrets. Varje val av en riktning för var och en av dessa kretsar ger en riktning av G med den sökta egenskapen (varje hörn v i G' har $\delta^-(v) = \delta^+(v)$ och till vart och ett av G 's hörn har högst en kant lagts).)
- (Låt en plan version av grafen ha r ytor. Då gäller (G är sammanhängande och inte ett träd, så kanterna kring varje yta innehåller alla kanter i minst en cykel och är alltså minst k st) $v - e + r = 2$ och $kr \leq 2e$, så $2 \leq v - e + \frac{2}{k}e = v - \frac{k-2}{k}e$, som ger $e \leq \frac{k}{k-2}(v - 2)$. Petersens graf har $v = 10$, $e = 15$ och $k = 5$. (Den blir inte planär ens om man tar bort en kant, eller om man tar bort ett hörn och dess kanter.)
Om man tar bort hörn a och dess kanter och suddar ut b, e, f (och gör deras två kanter till en) är den uppkomna grafen bipartit, med hörnmängder $X = \{c, i, j\}$ och $Y = \{d, g, h\}$. Alla hörn i X är grannar med alla i Y , så grafen är isomorf med $K_{3,3}$. Kuratowskis sats ger att Petersens graf inte är planär.
Om man kontraherar kanterna af, bg, ch, di, ej fås en graf som är isomorf med K_5 . Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär.
Eftersom suddandet av ett hörn kan uppfattas som en kontraktion av en kant, kan samma konstruktion som ovan också användas för att visa att Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär. Däremot kan man inte få K_5 för Kuratowskis sats (eftersom operationerna där inte kan öka valensen för ett hörn).)
- Om $k = 2$ finns det 2^c fullständiga matchningar (c antalet komponenter). (G kan k -kantfärgas. Varje färg ger en fullständig matchning. För $k = 2$ är varje komponent en cykel och kan matchas fullständigt på precis två sätt.)
- (Det gäller att visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med tentander och uppgifter som hörn och kanter precis då tentanden klarat uppgiften. Tag en delmängd A till tentanderna. Om $A \neq \emptyset$ är $|J(A)| \geq 4$ (varje tentand klarade minst 4 uppgifter) och om $|A| > 4$ är $|J(A)| = 10$ (varje uppgift klarades av minst 6 tentander, så någon i A). Halls sats ger resultatet (ty $|A| \leq 10$).)
- En fullständig matchning är $M'' = \{a5, b1, c2, d3, e4\}$.
(Starta från de omatchade b och e och sök utökande alternerande stigar (omväxlande matchade och omatchade kanter, första och sista hörn omatchade). Man finner $b \cdot 1 : d \cdot 3, b \cdot 4 : c \cdot 2$ och $e \cdot 4 : c \cdot 2, e \cdot 5 : a \cdot 1 : d \cdot 3$. Byte matchad-omatchad i den första ger den nya, större, matchningen $M' = \{a5, b1, c4, d3\}$.
Det finns två utökande alternerande stigar för M' , $e \cdot 4 : c \cdot 2$ och $e \cdot 5 : a \cdot 1 : b \cdot 4 : c \cdot 2$. Den första ger den fullständiga matchningen $M'' = \{a5, b1, c2, d3, e4\}$. Den andra ger $\{a1, b4, c2, d3, e5\}$.)

7. (Låt $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ och betrakta den bipartita $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$, med $\{A_i, B_j\} \in E$ om $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

En gemensam transversal motsvarar då precis en fullständig matchning i G (eftersom A_i :na är disjunkta, blir alla valda representanter olika). Enligt Halls sats finns en fullständig matchning om, för alla $k = 1, 2, \dots, n-1$, alla k av A_i :na möter åtminstone k av B_j :na, dvs inte alla innehålls i unionen av $k-1$ av B_j :na.)

8a,b,d. Det går säkert, **c.** Det är för vissa fördelningar omöjligt.

(a,b. Enligt uppgift 7, låt A_i , $i = 1, \dots, 13$ vara högarna och B_j , $j = 1, \dots, 13$ valörerna. Det finns antingen precis $4k$ (a.) eller minst $4k-3$ (b.) kort i varje union av k st av A_i :na och $4k-4$ i varje union av $k-1$ st av B_j :na, så det finns (enligt 7.) en gemensam transversal, dvs 13 kort med ett från varje hög och ett av varje valör.

c. Det finns inte två kort av olika valör i de två första högarna om de alla är ess.

d. Om man tar bort övriga kort av samma valör som det dragna kortet får man i k st av de andra högarna som i b. minst $4k-3$ kort etc.)

9. a: Nej, b: Ja.

(a. $m_i = i$ för $i = 1, 2, \dots$ är enda möjliga, men ett motsvarande m_0 finns inte.

b. $|\bigcup_{i \in H} M_i| = \begin{cases} \infty, & \text{om } 0 \in H \text{ eller } |H| = \infty \\ i, & \text{om } 0 \notin H, i = \max H, \end{cases}$ så $|\bigcup_{i \in H} M_i| \geq |H|$ för alla $H \subseteq \mathbb{N}$.

(I själva verket räcker Halls villkor för ändliga H för att det skall finnas en transversal om antingen I eller alla M_i är ändlig(a).

Om $|I| < \infty$ kan man först finna representanter för de ändliga M_i :na (enligt den ändliga Halls sats) och sedan för varje oändlig M_i ta en ledig representant.

Om $|M_i| < \infty$ för alla $i \in I$ (men kanske $|I| = \infty$) visar vi med kompakthetssatsen

att $|\bigcup_{i \in H} M_i| \geq |H|$ för alla ändliga $H \subseteq I$ medför att en transversal finns:

Inför (oändligt många) konstanter: c_i för $i \in I$ och d_r för $r \in \bigcup_{i \in I} M_i$.

Låt Γ bestå av alla sentserna:

$$c_i \neq c_j \text{ för } i, j \in I, i \neq j,$$

$$c_i = d_{r_1} \vee c_i = d_{r_2} \vee \dots \vee c_i = d_{r_{|M_i|}} \text{ för } i \in I, M_i = \{r_1, r_2, \dots, r_{|M_i|}\}.$$

Om $\Gamma' \subseteq \Gamma$ är ändlig ingår bara ett ändligt antal av c_i :na i Γ' :s sentser och den ändliga Halls sats ger en modell för Γ' (ingående c_i tolkas som motsvarande m_i i en ändlig transversal).

Kompakthetssatsen ger en tolkning för hela Γ , vilken ger en transversal för det oändliga I (m_i är ett $r \in M_i$ sådant att $c_i = d_r$ i tolkningen). Vi är klara och det räckte att Halls villkor är uppfyllt för alla ändliga $H \subseteq I$.

(Att $|M_i| < \infty$ behövs för att $c_i = d_{r_1} \vee c_i = d_{r_2} \vee \dots \vee c_i = d_{r_{|M_i|}}$ skall vara en sents.)

I exemplet är både I och M_0 oändliga och Halls villkor räcker inte.)

10. $u_n = 3^n + (-1)^n \cdot 9^n$. (Med $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, den genererande funktionen för $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, fås $U(x) - u_1 x - u_0 + 8x(U(x) - u_0) - 9x^2 U(x) = \frac{24x^2}{1-3x}$ och $U(x) = \frac{2+6x}{(1-3x)(1+9x)} = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+9x}$ etc. (andra begynnelsevillkor ger en konstantterm också).)

11. $h_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ (catalantalen). (Summera antalen indelningar med olika trianglar vid en given av R :s sidor. Det ger $h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \dots + h_{n-1} h_1$ (för $n \geq 2$), så $H(x)^2 - H(x) + x = 0$, $H(0) = 0$ och $H(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ etc.)

12. Det finns 4 sådana partitioner ([3 13], [5 11] [3³ 7] [3² 5²]).

(Kan fås "med inspektion" eller som i exemplet s. 380-1 i Biggs.)

13. (Lägg till 3 extra punkter i Ferrersdiagrammet (i kol. 1, 2), så att den konjugerade partitionen verkligen får precis två, olika delar (eller se att båda antalen är $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$).)

14. (En generalisering av (Eulers sats,) exemplet på s. 383 i Biggs,

$$(1+x+\dots+x^k)(1+x^2+\dots+x^{2k})\dots = (1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\dots(1-x^{k+1})^{-1}\dots(1-x^{2(k+1)})^{-1}\dots$$

15. (Alla ultrafilter på en ändlig mängd är principala ($|\mathcal{P}(I)| < \infty$, så $\cap \mathcal{U} \in \mathcal{U}$ och $|\cap \mathcal{U}| = 1$, ty en av $\{\iota\}$ och $I \setminus \{\iota\} \in \mathcal{U}$), så $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \iota_0 \in A\}$ för ett $\iota_0 \in I$. Enligt Loś: $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota / \mathcal{U} \models \varphi((a_\iota^1)_\mathcal{U}, \dots) \Leftrightarrow \{\iota \in I \mid \mathfrak{A}_\iota \models \varphi(a_\iota^1, \dots)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \iota_0 \in \{\iota \in I \mid \mathfrak{A}_\iota \models \varphi(a_\iota^1, \dots)\} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{\iota_0} \models \varphi(a_{\iota_0}^1, \dots)$. $\varphi(x, y) : x = y$ ger bijektionen $h: \prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_\iota \xrightarrow{\sim} A_{\iota_0}$, vilken enligt ovan är en isomorfi.)

16. (Beviset att ett ultrafilter bestämmer sker i tre steg:

1. Vredens lägen kan märkas med A 's elements namn:

Om lampa $a \in A$ lyser, märk alla vreds lägen ” a ”. Vrid så alla vred till nya lägen, som märks med ” b ” om lampa b tändes ($b \neq a$, ty alla vred ändrades). Upprepa med nya lägen för alla vred etc. Varje vreds lägen märks så med alla A 's elements namn. Tillstånden (alla vreds lägen) ges bijectivt (givet en sådan märkning) av alla $f: X \rightarrow A$ och vi betecknar lampan som tänds av f med $\ell(f)$ ($\ell: A^X \rightarrow A$).

2. Det finns $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sådan att $f^{-1}[a] \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \ell(f) = a$:

- $f^{-1}[a] = \emptyset \Rightarrow \ell(f) \neq a$ (om alla byter till läge a blir utslaget a),
- om $\ell(f) = a$ och $f^{-1}[a] = Y$, är $\ell(g) = a$ för alla g med $g^{-1}[a] = Y$, ty om $b \neq a$, $f_b^{-1}[b] = Y$, $f_b^{-1}[a] = X \setminus Y$, är $\ell(f_b) = b$ (a eller b , men alla ändrade från f), för alla $b \neq a$, så $g^{-1}[a] = Y$ ger $\ell(g) = a$ (alla ändrade från f_b , $b \neq a$),
- om $\ell(f) = a$ och $f^{-1}[a] = Y$, är (för alla $b \in A$) $\ell(g) = b$ om $g^{-1}[b] = Y$, ty det är sant för f_b ovan och därmed för alla sådana g (enligt förra punkten),
- $\mathcal{U} = \{Y \subseteq X \mid f^{-1}[a] = Y \text{ för något } f \text{ med } \ell(f) = a\}$.

3. $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter:

- $\emptyset \notin \mathcal{U}$ enligt första punkten i 2., $X \in \mathcal{U}$ enligt märkningen av vreden,
- $Y \in \mathcal{U} \Leftrightarrow Y^c \notin \mathcal{U}$, ty om $f^{-1}[a] = Y$, $f^{-1}[b] = X \setminus Y$, är $\ell(f) = a$ eller b ,
- $Y_1, Y_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{U}$ (bara här behövs att $|X| \geq 3$), ty för olika $a, b, c \in A$, $f_1^{-1}[b] = Y_1$, $f_1^{-1}[a] = X \setminus Y_1$, $f_2^{-1}[c] = Y_2$, $f_2^{-1}[a] = X \setminus Y_2$ (så $\ell(f_1) = b$, $\ell(f_2) = c$), så ger $f^{-1}[a] = Y_1 \cap Y_2$, $f^{-1}[c] = Y_1 \setminus Y_2$, $f^{-1}[b] = X \setminus Y_1$ att $\ell(f) = a$ (alla ändrade från f_1, f_2), så $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{U}$,
- ($Z \in \mathcal{U}$ och $Z \subseteq Y \subseteq X$) $\Rightarrow Y \in \mathcal{U}$, ty $Y^c \in \mathcal{U}$ skulle ge $\emptyset = Z \cap Y^c \in \mathcal{U}$.

Speciellt, om X är ändlig måste det finnas ett vred (”diktatorsvredet”) som ensamt avgör vilken lampa som lyser (eftersom alla ultrafilter då är principala.)

17a. Vi skall visa $A \rightarrow (B \vee C) \vdash \neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$ med naturlig deduktion.

Vi antar $\neg B$ och vill visa $\neg C \rightarrow \neg A$, för det antar vi $\neg C$ och vill visa $\neg A$, för det antar vi A och vill visa $\perp$. Notera $\vee E$ -regeln.

1	(1)	$A \rightarrow (B \vee C)$	premiss
2	(2)	$\neg B$	antagande
3	(3)	$\neg C$	antagande
4	(4)	A	antagande
1,4	(5)	$B \vee C$	1,4 $\rightarrow E$
6	(6)	B	antagande
2,6	(7)	$\perp$	2,6 $\neg E$
8	(8)	C	antagande
3,8	(9)	$\perp$	3,8 $\neg E$
1,2,3,4	(10)	$\perp$	5,6,7,8,9 $\vee E$
1,2,3	(11)	$\neg A$	4,10 $\neg I$
1,2	(12)	$\neg C \rightarrow \neg A$	3,11 $\rightarrow I$
1	(13)	$\neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$	2,12 $\rightarrow I$

17b. Vi vill visa $\vdash \neg \perp$ och antar $\perp$, som vi just behöver för att visa $\neg \perp$.

1	(1)	$\perp$	antagande
	(2)	$\neg \perp$	1,1 $\neg I$

17c. Vi vill visa $A, \neg A \vdash B$. Premisserna ger $\perp$, som används för att visa $\neg\neg B$ (då vi antagit $\neg B$). DN-regeln behövs. Exemplet visar hur vad som helst kan härledas från icke-konsistenta premisser ("ex contradictione quodlibet" eller "ex falso quodlibet").

1	(1)	A	premiss
2	(2)	$\neg A$	premiss
1,2	(3)	$\perp$	2,1 $\neg E$
4	(4)	$\neg B$	antagande
1,2	(5)	$\neg\neg B$	4,3 $\neg I$
1,2	(6)	B	5 DN

17d. Vi vill visa $\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow \neg Ryz) \vdash \exists y \forall x \neg Rxy$.

Idé: Om Rab för några a, b fås $\neg Rca$ för alla c från premissen. Annars $\neg Rab$ för alla a, b . I båda fallen fås slutsatsen. Som ofta när det handlar om två fall passar det med ett indirekt bevis, dvs vi antar motsatsen till den önskade slutsatsen (och använder DN-regeln på slutet).

1	(1)	$\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow \neg Ryz)$	premiss
2	(2)	$\neg \exists y \forall x \neg Rxy$	antagande
3	(3)	Rab	antagande
4	(4)	Rca	antagande
1	(5)	$\forall y \forall z (Rcy \rightarrow \neg Ryz)$	1 $\forall E$
1	(6)	$\forall z (Rca \rightarrow \neg Raz)$	5 $\forall E$
1	(7)	$Rca \rightarrow \neg Rab$	6 $\forall E$
1,4	(8)	$\neg Rab$	7,4 $\rightarrow E$
1,3,4	(9)	$\perp$	8,3 $\neg E$
1,3	(10)	$\neg Rca$	4,9 $\neg I$
1,3	(11)	$\forall x \neg Rxa$	10 $\forall I$ (c inte i (1), (3))
1,3	(12)	$\exists y \forall x \neg Rxy$	11 $\exists I$
1,2,3	(13)	$\perp$	2,12 $\neg E$
1,2	(14)	$\neg Rab$	3,13 $\neg I$
1,2	(15)	$\forall x \neg Rxb$	14 $\forall I$ (a inte i (1), (2))
1,2	(16)	$\exists y \forall x \neg Rxy$	15 $\exists I$
1,2	(17)	$\perp$	2,16 $\neg E$
1	(18)	$\neg \neg \exists y \forall x \neg Rxy$	2,17 $\neg I$
1	(19)	$\exists y \forall x \neg Rxy$	18 DN