

Övning 5, må 4 december 2017 svar och ledningar

1. Enklaste sättet för dem att komma över är (se grafen nedan):

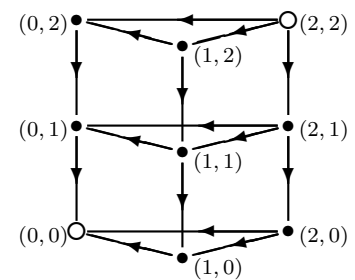
$(2, 2) \rightarrow (0, 2) \leftarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1) \leftarrow (2, 1) \rightarrow (0, 1) \leftarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \leftarrow (2, 0) \rightarrow (0, 0)$
(där (b, v) är tillståndet med b barn och v vuxna på den första stranden och $\rightarrow$ betyder att båten går från strand 1 till 2 och $\leftarrow$ från 2 till 1. Lösningen är alltså: 2 barn över, 1 barn tillbaks, 1 vuxen över, 1 barn tillbaks, 2 barn över, 1 barn tillbaks, 1 vuxen över, 1 barn tillbaks, 2 barn över).

(Pilarna visar möjliga övergångar mellan fördelningar av personer på stränderna, då båten går från strand 1 till 2. Andra hållet innebär att gå mot pilarna.

De vill ta sig från hörn $(2, 2)$ (alla på strand 1) till hörn $(0, 0)$ (alla över floden) genom att gå omväxlande med och mot pilar.

Om man undviker upprepning är lösningen entydig.

Se t.ex. i Wikipedia på "Propositiones ad Acuendos Juvenes" om problemets historia (från ca år 800).)



2. Nej. (Bara den högra är bipartit.)

3. (Postfacksprincipen. Om något hörn har valens 0 är alla valenser $\leq n - 2$ etc.)

4. i) nej, ii) ja, iii) nej. (i. $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$, ii. C_7 med tre extra diagonaler, iii. högst hur många kanter till hörnen 2, 2, 3, minst hur många till 5, 5, 5, 6?)

5. (Om x, y tillhör olika G -komponenter är x, y en $\overline{G}$ -stig och om $x \neq y$ ligger i samma komponent, men z i en annan, är x, z, y en $\overline{G}$ -stig.)

6. (Godtyckliga $x, y \in V$ tillhör samma komponent, ty om $x \neq y$ är de antingen grannar eller har en gemensam granne (postfacksprincipen).)

7. ($\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot 28 = 56$ och alla $\delta(v) \geq 3$ ger $|V| \leq 18$. T.ex. kubgrafen med medelpunkterna på två disjunkta kanter förenade till ett nytt hörn har 9 hörn och 14 kanter. Dubbla den.)

8. Två. (Komplementgrafen är 2-reguljär.)

9. (Induktion över $|V|$. Låt v_0 vara ett hörn med minimal valens, $V_0 = \{v \in V \mid v = v_0 \text{ eller } \{v, v_0\} \in E\}$ och $V' = V \setminus V_0$ etc.)

10. Nej. (Den är bipartit med ett udda antal hörn.)

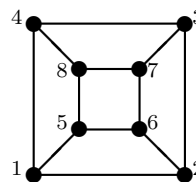
11a. (Om rutorna är omväxlande svarta och vita (som på ett vanligt schackbräde), blir varannan besökt ruta vit och varannan svart. Eftersom springaren skall återkomma till startrutan måste det finnas lika många svarta som vita rutor (om den gör minst ett drag), dvs totalt ett jämnt antal.

b. Antag att det finnes en sådan sluten väg (dvs en hamiltoncykel). Färga nu rutorna i rad 1 och 4 röda och de i rad 2 och 3 blå. Då kan springaren aldrig gå från röd till röd och eftersom brädet har lika många av varje färg, måste varannan ruta den besöker vara blå och varannan röd. Men detsamma gäller för de svarta och vita rutorna i den vanliga färgningen (som i a.). Det betyder att alla röda rutor vore vita eller alla svarta. Motsägelse.)

12. 14. (Varje komponent i en acyklisk graf är ett träd.)

13. (Betrakta en färgning med minimalt antal "kollisioner" (enfärgade kanter). Att ändra färg på ett hörn kan inte minska antalet kollisioner.)

14. T.ex. 1,3,6,8,2,4,5,7; 1,7,5,6,2,4,3,8 och 1,7,5,6,3,4,2,8.
(För att få minsta möjliga antal färger efter att ha färgat några hörn, ordna resten efter färgerna i en minimal färgning.)



15. (Om en minimal färgning av G har n_i hörn med färg $i = 1, 2, \dots, \chi(G)$ är $\chi(\overline{G}) \geq n_i$ för $i = 1, 2, \dots, \chi(G)$ (hörn med samma färg i en G -färgning är grannar i $\overline{G}$).
Det ger $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n_1 + n_2 + \dots + n_{\chi(G)} = |V|$.)

16. (Induktion över $|E|$ för påståendet att de två högstegradstermerna i $P_G(\lambda)$ är λ^n och $-|E|\lambda^{n-1}$, med rekursionen för $P_G(\lambda)$.)

17. ($P_{C_5}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2) = \dots = (\lambda-1)((\lambda-1)^4-1)$. Färga 1 och 2 (hörn i ordning) på $\lambda(\lambda-1)$ sätt. Två fall för 3 (som eller inte som 1) och sedan för 4 (också som eller inte som 1) etc.)

18. 10. ($v - e + r = 2$ (Eulers polyederformel) och $\sum_{x \in V} \delta(x) = 4v = 2e = 2 \cdot 16$.)

19. 9 hörn med valens 3 och 3 med valens 5. (Eulers polyederformel ger e . x hörn av valens 3 (så $12 - x$ av valens 5) ger $3x + 5(12 - x) = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$.)

20. 6 ytor har 4 kanter. (Om x och y ytor har 4 respektive 6 kanter får vi $v - e + (x + y) = 2$ och $3v = 2e = 4x + 6y$. (v, e, y inte entydigt bestämda).)

21. (Eftersom $\overline{G_1[G_2]}$ och $\overline{G_1}[\overline{G_2}]$ båda har hörnmängden $V_1 \times V_2$ räcker det att visa att deras respektive kantmängder E_{VL} och E_{HL} är lika.

Låt, för $u_i, v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, $e = \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\}$. Enligt definitionen av $G_1[G_2]$ gäller $e \in E_L$ precis i de fall som markerats med $\circ$ i tabellen:

	$u_2 = v_2$	$\{u_2, v_2\} \in E_2$	$\{u_2, v_2\} \in \overline{E_2}$
$u_1 = v_1$		$\circ$	$*$
$\{u_1, v_1\} \in E_1$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\{u_1, v_1\} \in \overline{E_1}$	$*$	$*$	$*$

Med $\overline{G_i}$ i stället för G_i (dvs $\overline{E_i}$ i stället för E_i) för E_{HL} och definitionen av komplement-grafen för E_{VL} fås att båda ges av fallen med $*$.)

22. (a. Induktion över $|V|$. I steget, om det finns ett udda hörn, v^* säg, tag bort det och byt kanter och icke-kanter mellan dess grannar. Visa att en uppdelning av den nya, mindre, grafen ger en av G om v^* förs till den ena av de två hörnmängderna.
b. Låt G' vara G med ett nytt hörn u som är granne med alla G 's hörn. Använd resultatet i a. och tag bort u .)

23. (Låt $A(G)$ vara antalet acykliska orienteringar av G .

Det räcker att betrakta enkla grafer (en ögla i G ger $P_G(\lambda) = 0 = A(G)$ och multipla kanter kan ersättas med en kant utan att $P_G(\lambda)$ eller $A(G)$ förändras).

Induktion över $|E|$. I steget, använd rekursionsformeln för $P_G(\lambda)$ och visa att $|P_{G-e}(-1) - P_{G/e}(-1)| = |P_{G-e}(-1)| + |P_{G/e}(-1)|$.

Återstår att visa att $A(G) = A(G-e) + A(G/e)$ för varje graf G . Visa att varje orientering av alla kanter utom e i G kan fortsättas till 0, 1 eller 2 olika acykliska orienteringar av G omm den är en för 0, 1 eller 2 av $G-e$ och G/e etc.)