

Övning 4, må 27 november 2017 svar och ledningar

1a. Nej, **b.** a är identitet, **c.** $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$,
 $c^{-1} = c$, $d^{-1} = d$, $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$,

d. Ordningar 1: a ; 2: b, c, d ; 3: f, g ; cykliska
delgrupper: $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, f, g\}$.

e. c , inga parenteser behövs (associativitet).

Grupptabellen till höger.

($a * c = c \Rightarrow a = 1$ (ger rad 1, kolumn 1).

Grupptabellen är en latinsk kvadrat, så

$b * d = f$, $f * d = b$, $g * d = c$ etc.)

*	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

2. (Ordning 5 (primit), men inte abelsk ($a \circ b \neq b \circ a$).

(Alt. $a \circ (b \circ c) = c \neq a = (a \circ b) \circ c$.)

3a. $x = b^{-1}a$, **b.** $x = (ab)^{-1}$,

(c., d. Använd $xy = 1 \Rightarrow yx = 1$, e. $(x^2)^2 = x^3x$, f. $xyxyx = 1 \Rightarrow (xy)^3 = y$.)

4. Nej. ($e \circ e = e \Rightarrow e = 1$, men då vore $o(a) = 2 \nmid |G|$.)

5a. $\mathbb{Z}_{18}$, **b.** $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$. (a. $\langle 7 \rangle = \mathbb{Z}_{18}$,

b. $7 - 3 = 4$, så sidoklassen $C = 3 + \langle 4 \rangle = 3 + \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.)

6 (a. S0: $1 \in H \cap K$, S1: $x, y \in H \cap K \Rightarrow x, y \in H, K \Rightarrow xy \in H, K \Rightarrow xy \in H \cap K$,
S2: $x \in H \cap K \Rightarrow x \in H, K \Rightarrow x^{-1} \in H, K \Rightarrow x^{-1} \in H \cap K$.

(P.s.s. ses att **varje** skärning av delgrupper är en delgrupp, så för varje $M \subseteq G$ finns en **minsta**
delgrupp (en som innehålls i alla) till G som innehåller M , nämligen skärningen av dem alla.)

b. $a \in H \setminus K$, $b \in K \setminus H \Rightarrow ab \notin H, K$ ($b = a^{-1}ab$, $a = abb^{-1}$), så $ab \notin H \cup K$.)

c. $|H \cap K| = 1$.

7. $S_3 \times C_{11}$ (där C_{11} är den cykliska gruppen med 11 element).

8. Ja (i själva verket är alla $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$, p primtal, cykliska).

($|\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}| = 18 = 2 \cdot 3^2$, så $o(g) = 1, 2, 3, 6, 9$ eller 18 för alla $g \in \mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}$.)

Alltså är $o(g) = 18$ om $g^6, g^9 \neq 1$. $2^6 = 7$, $2^9 = 18$.)

9. Den är hela S_4 . (Visa t.ex. att alla transpositioner i S_4 ligger i delgruppen.

$(1\ 2\ 3)(3\ 4)(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 4)$, $(1\ 2\ 3)(1\ 4)(1\ 2\ 3)^{-1} = (2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 4)(1\ 4) = (1\ 2)$,

$(1\ 4)(3\ 4)(1\ 4) = (1\ 3)$, $(2\ 4)(3\ 4)(2\ 4) = (2\ 3)$, etc.)

10. Nej (Tag $a \neq 1$, $b = a^{-1}$. $o(ab) = o(1) = 1 < o(a) = \text{mgm}(o(a), o(b))$).

11. (Om H är en delgrupp till $G = \langle x \rangle$, låt $A = \{i \mid 0 < i, x^i \in H\}$.

Om $A = \emptyset$ är $H = \{1\}$ (ty också $\{i \mid i < 0, x^i \in H\} = \emptyset$), en cyklisk delgrupp till G .

Annars är $H = \langle x^k \rangle$ med $k = \min A$: $\langle x^k \rangle \subseteq H$ (eftersom H är sluten under $\cdot$) och
för varje $j \in \mathbb{Z}$: $x^j \in H \Rightarrow x^{j-kq} \in H$ och med $0 \leq j - kq < k$ ger det $j = kq$ så
 $H \subseteq \langle x^k \rangle$ etc.)

12. (Alla element har ordning 1, 5, 11 eller 55. Om inget har ordning 5 finns det 54 element av ordning 11 och ett av ordning 1 ($o(g) = 55 \Rightarrow o(g^{11}) = 5$).

Varje element utom 1 tillhör då exakt en delgrupp av ordning 11 (snittet av två delgrupper av ordning 11 har ordning 1 eller 11 (en delgrupp)), så de 54 elementen $\neq 1$ partitioneras i delar med 10 element var. Omöjligt ($10 \nmid 54$), så minst ett element har ordning 5. Att minst ett element har ordning 11 visas på samma sätt ($4 \nmid 54$).

13. $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$ (C_2 cyklisk med 2 element ($\cong (\mathbb{Z}_2, +)$)).

14. Se nedan.

(a. Rotationsaxlar och speglingsplan nedan går genom tetraederns tyngdpunkt.

Typ	Antal	Paritet	Exempel	Stel avbildning av rummet
$[1^4]$	1	jämn	$id = (1)$	identitetsavbildningen
$[1^2 2]$	6	udda	$(1\ 2)$	spegling i ett plan innehållande kanten 34
$[2^2]$	3	jämna	$(1\ 2)(3\ 4)$	rotation π kring en axel genom 12:s och 34:s mittpunkter
$[13]$	8	jämna	$(1\ 2\ 3)$	rotation $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring en axel genom 4
$[4]$	6	udda	$(1\ 2\ 3\ 4)$	rotation $\pm \frac{\pi}{2}$ kring en axel genom 13:s och 24:s mittpunkter, följt av en spegling i ett plan vinkelrätt mot axeln

b. Jämna permutationer svarar mot rotationer, udda mot avbildningar som innehåller (ett udda antal) speglingar.

c. N är (icke-tom, ändlig och) sluten under gruppoperationen, alltså en delgrupp.

Den är en union av konjugatklasser ($[1^4]$ och $[2^2]$), så en normal delgrupp.

Eftersom operationen i kvotgruppen G/N ges av $(g_1 N)(g_2 N) = (g_1 g_2) N$ och varje sidoklass innehåller precis en permutation π med $\pi(4) = 4$ (vi skriver då (lite oegentligt) $\pi \in S_3$) (det finns $\frac{|S_4|}{|N|} = 6 = |S_3|$ sidoklasser och om $\sigma, \pi \in S_3$ är i samma sidoklass: $\sigma \in \pi N \Rightarrow \pi^{-1} \sigma \in N \cap S_3 = \{(1)\} \Rightarrow \sigma = \pi$, så exakt ett element från S_3 i varje), är G/N isomorf med gruppen av dem, så med S_3 , $G/N \cong S_3$.)

15a. 21, **b.** 24, **c.** $\frac{1}{8}(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k)$ och $\frac{1}{4}(k^4 + k^2 + 2k)$

(Vi använder Burnside's lemma. Brickans grupp av symmetrirotationer har i a. 8 element (kvadratens symmetrigrupp; $|G_x| = 2$, $|G_x| = 4$ för alla hörn x).

Vi behöver $|F(g)|$ för varje (typ av) symmetrirotation g . Med k färger:

typ av g	antal g	g 's permutation av brickans hörn	$ F(g) $
id	1	$[1^4]$	k^4
rot $\pm \frac{\pi}{2}$	2	$[4]$	k
rot π	1	$[2^2]$	k^2
vänd-p	2	$[2^2]$	k^2
vänd-d	2	$[1^2\ 2]$	k^3

("rot v ": rotation vinkeln v kring en axel vinkelrät mot brickan och genom dess mittpunkt,

"vänd-p, vänd-d": vändning av brickan kring en axel parallell med två sidor eller kring en diagonal.)

$|F(g)|$: antalet g -invarianta (samma färg på hörn i samma cykel i g 's permutation) färgningar.

I b. är det bara 4 element i symmetrigruppen (de som inte vänder brickan).

Lemmat ger antalet väsentligt olika färgningar, $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$,

dvs i a. $\frac{1}{8}(k^4 + 2k + k^2 + 2k^2 + 2k^3)$ och i b. $\frac{1}{4}(k^4 + 2k + k^2)$, med $k = 3$.)

16. $\frac{1}{12}(k^6 + 3k^4 + 8k^2)$. (Burnside's lemma. Den regelbundna tetraederns grupp av symmetrirotationer har 12 element: identitetselementet (6 banor av kanter, varje kant en bana, $|F(id)| = k^6$), åtta rotationer $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring axlar genom ett hörn och mittpunkten av motstående sidoyta (2 banor av kanter, de vid hörnet och de vid ytan, $|F(g)| = k^2$) och tre rotationer π kring axlar genom mittpunkterna av motstående kanter (4 banor av kanter, de två motstående och två par av övriga fyra kanter, $|F(g)| = k^4$).