

Övning 3, må 20 november 2017 svar och ledningar

1. (Båda leden ger antalet sätt att välja en k -delmängd av en r -delmängd till en n -mängd. (Välj antingen först r -delmängden och sedan k -delmängden till den, eller först k -delmängden och sedan övriga $r - k$ element bland de återstående $n - k$. (Alt.: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ etc.))
2. (Låt $f(x) = (1 - x)^n = \dots$ och betrakta $f''(1)$, där $f''(x)$ är (den formella) andraderivatan av $f(x)$. (Alt.: $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ etc.))
3. $\binom{10}{6} \cdot 4^4 \cdot 3^6 (= 39\,191\,040)$.
(Binomialsatsen. Den enda termen med x^{12} är $\binom{10}{6} \cdot 4^4 \cdot (3x^2)^6$.)
4. 2 240 tal.
(5 möjligheter för sista siffran, sedan 8 för första etc. (multiplikationsprincipen).)
5. 4 206 sätt. (Sällprincipen. Med $X = \{\text{alla möjliga ord}\}$, $A_{1,2,3} = \{\text{ord med ED, TIK, DISK}\}$, söker vi (om EDIKT ingår, ingår ED) $|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = \dots = 7! - (6! + 5! + 4!) + (4! + 3! + 0) - 0$.)
6. 105. ($129\,600 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Antalet faktorer 2 i d kan väljas på $6 + 1 = 7$ sätt och för varje sådant kan antalet faktorer 3 väljas på 5 sätt etc. (multiplikationsprincipen).)
7. $\frac{1}{12} \cdot 15! \cdot 14 \cdot 13 (= 19\,833\,061\,248\,000)$. (Leden får "identitet" av personerna längst fram i varje led. De kan väljas på $\binom{15}{3}$ sätt. För att finna antalet sätt att placera de andra barnen, ordna dem först (kan göras på $12!$ sätt) och dela sedan upp dem i tre delar (möjligen en eller två tomma), vilket kan göras på $\binom{14}{2}$ sätt (sätt in två "väggar"). Svaret blir $\binom{15}{3} \cdot 12! \cdot \binom{14}{2}$.
(Alt. $\frac{1}{3!}$ av antalet led med identitet. För deras antal, ordna alla barnen ($15!$ sätt) och välj förstabarn till andra och tredje leden ($\binom{14}{2}$ sätt). Svaret, $\frac{1}{3!} \cdot 15! \cdot \binom{14}{2}$.)
8. 65 sätt. (Det totala antalet sätt att dela upp mängden i tre icke-tomma delar: $S(6, 3)$, stirlingtalet. Av dem ligger 1 och 2 i samma delmängd i $S(5, 3)$ uppdelningar. Så svaret är $S(6, 3) - S(5, 3) = 90 - 25$.
Alt. Utgå från tre påsar med 1 och 2 i varsin av dem. Övriga 4 element kan placeras ut på 3^4 sätt, men av dem har 2^4 den tredje mängden tom. $3^4 - 2^4 = 81 - 16$.)
9. Sannolikheten är $\frac{5! \cdot 266}{6^7} \approx 0,114$. (Antalet sätt alla tal kommer upp = antalet surjektioner $8\text{-mängd} \rightarrow 6\text{-mängd}$, $6! \cdot S(8, 6)$. Totala antalet resultat = antalet funktioner $8\text{-mängd} \rightarrow 6\text{-mängd}$, 6^8 . Alla dessa funktioner lika sannolika.)
10. 332 lösningar. (Samma som antalet $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ med $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ och $0 \leq x_1 \leq 5$, $-3 \leq x_2 \leq 3$, $2 \leq x_3 \leq 9$, $0 \leq x_4$.
Antalet lösningar (i $\mathbb{Z}^4$) till $x_1 + \dots + x_4 = b$, $a_i \leq x_i$ är samma som antalet till $y_1 + \dots + y_4 = b - a_1 - \dots - a_4$, $0 \leq y_i$ ($y_i = x_i - a_i$), $\binom{b - a_1 - \dots - a_4 + 3}{3}$ (oordnat urval med upprepning tillåten). Sällprincipen ger $\binom{19}{3} - ((\binom{13}{3} + \binom{12}{3} + \binom{11}{3}) + ((\binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3}) - \binom{-2}{3})$. (Alt. Med genererande funktioner.))
11. På 1 744 596 sätt. (En sådan uppdelning innebär att dela in pojkarna och flickorna i vardera tre icke-tomma grupper ($S(7, 3) \cdot S(8, 3) = 301 \cdot 966$ sätt) och para ihop de grupperna ($3!$ sätt).)

12. (a. Kalla punkterna $1, 2, \dots, 6$. Antag att triangeln 123 är röd och att det inte finns någon annan enfärgad triangel. Då går minst två blå linjer från varje av 4 och 5 till 1, 2, 3 (annars en röd triangel till), så blå linjer från 4 och 5 möts i 1, 2 eller 3 och 45 måste vara röd, liksom 56 och 46. Motsägelse.

b. Välj en punkt. Från den går antingen röda linjer till några 4 punkter eller blå linjer till några 6 punkter. I första fallet har de 4 punkterna antingen en röd linje bland sig eller inte etc., i det andra har de 6 punkterna en röd eller en blå triangel bland sig etc.

c. Enligt b. skulle varje punkt för att undvika triangeln och tetraedern ha exakt 3 röda linjer och 5 blå. Det skulle ge $9 \cdot 3 = 27$ röda halvlinjer, motsägelse.)

13. $\frac{(n+5)!}{5! \cdot n!}$ olika resultat. (Oordnat urval med upprepning möjlig, $\binom{n+6-1}{6-1}$.)

14. Arean är $(\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2$ (där π är $\pi(\approx \frac{355}{113})$).

(Sällprincipen. Triangeln, T , är skärningen av halvsfärerna A, B, C .

Deras komplement skärning är en triangel, T' , som är kongruent med T .

$A \cap B$ är en "klyfta" av sfären, med area $\frac{\gamma}{2\pi}$ av sfärens etc.

Med $|\cdot|$ för area, får man $|T| = |T'| = 4\pi R^2 - 3 \cdot 2\pi R^2 + (\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} + \frac{\gamma}{2\pi})4\pi R^2 - |T|$.

15a. $4^7 (= 16384)$ **b.** $4! \cdot S(7, 4) (= 8400)$ **c.** $\binom{10}{7} (= 120)$ **d.** $\binom{6}{3} (= 20)$

e. $\sum_{k=1}^4 S(7, k) (= 715)$ **f.** $S(7, 4) (= 350)$ **g.** $\sum_{k=1}^4 p_k(7) (= 11)$ **h.** $p_4(7) = 3$

(där $p_k(n)$ är antalet partitioner av $n \in \mathbb{Z}_+$ i precis k delar)

(a. Funktioner $7\text{-mängd} \rightarrow 4\text{-mängd}$, b. Surjektioner d:o,

c. Oordnat urval med upprepning möjlig, d. En i varje, sedan som c.

e. Partitioner i 1,2,3,4 delar, f. Partitioner i 4 delar.

g. Partition av 7 i 1,2,3,4 delar, h. Partition av 7 i 4 delar.)

16. Summan är n . (Möbiusinversion: $\sigma = 1 * id \Leftrightarrow id = \mu * \sigma$.)

17a. 24 st, **b.** 12 av dem.

(a. $\sigma\pi = \pi\sigma \Leftrightarrow \pi = \sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(4))(\sigma(2)\sigma(6)\sigma(3))(\sigma(5)\sigma(7))$).

3-cyklerna måste vara samma. Valet av $\sigma(2)$ som 2, 6 eller 3 ger $\sigma(6)$ och $\sigma(3)$.

Valet av $\sigma(1)$ som 1, 4, 5 eller 7 ger $\sigma(4)$. $\sigma(5)$ väljs som en av två, ger $\sigma(7)$.

b. $(1\ 4) \in S_7$ kommuterar med π , så om σ gör det, gör $\sigma(1\ 4)$ det, etc.)

18a. Anna bor i hus 4, **b.**

Fru i hus	1	2	3	4	5	6
har sin bror i	4	6	5	1	2	3

(Låt $\pi \in S_6$ ges av att brodern till frun i hus i bor i hus $\pi(i)$.

Systemen till mannen i hus i bor då i hus $\pi^{-1}(i)$.

π har ingen 1-cykel (inga syskon gifta), så den är av typ $[6]$, $[24]$, $[3^2]$ eller $[2^3]$.

$\pi(1) = \pi^{-1}(1)$ och $\pi(2) \neq \pi^{-1}(2)$, så 1, men inte 2, ingår i en 2-cykel.

π :s typ är alltså $[24]$.

a. 2:s cykel består av fyra av husen 2–6 (1 inte i den cykeln). $\pi(i) \neq i \pm 1$ (inga syskon grannar), så $i - 1, i, i + 1$ inte alla i 4-cykeln (en av $\pi(i), \pi^{-1}(i)$ vore $i \pm 1$), så den måste bestå av husen 2, 3, 5 och 6. 2-cykeln är alltså $(1\ 4)$ och Anna bor i hus 4.

b. $\pi(6) \neq 2, 5$, så $\pi(6) = 3$, $\pi(3) \neq 6, 2$, så $\pi(3) = 5$, $\pi(5) \neq 3, 6$, så $\pi(5) = 2$.)

19. Fibonaccitalet F_{n+1} . (Låt $\binom{m}{r} = 0$ då $r < 0$ eller $r > m$, $m, r \in \mathbb{Z}$. Då är summan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n-k}{k}$. Visa att den uppfyller de definierande villkoren för F_{n+1} .

(Alt. Summan löser ett problem med fibonaccitalen som (entydig) lösning.)

20. (Enligt Ramseys sats finns en oändlig $Y \subseteq \mathbb{N}$ där antingen $x_i \mathcal{R} x_j$ gäller för alla $i < j$ i Y eller $x_i \not\mathcal{R} x_j$ gör det. Förutsättningen motsäger det senare.)