Matematik, KTH **SF1679 Diskret matematik**
B.Ek **ht 2017**

Övning 2, må 13 november 2017
svar och ledningar

1. Ja. (Uttryckt i ekvivalensklasser finner vi $[1] = [2] = [3] = [4]$, $[5] = [6]$ och $[2] \neq [6]$. Det bestämmer $\mathcal{R}$ helt.)

2. Det finns fem olika sådana $\mathcal{R}$, med mängderna ekvivalensklasser
$\{\mathcal{M}\}$, $\{\{1,2,3,4,5,6\},\{7\}\}$, $\{\{1,4,5\},\{2,3,6,7\}\}$,
$\{\{1,4,5,7\},\{2,3,6\}\}$, $\{\{1,4,5\},\{2,3,6\},\{7\}\}$.
(Villkoren blir för ekvivalensklasserna precis att $[1] = [5] = [4]$, $[2] = [3] = [6]$.)

3. Nej. (Den är reflexiv och transitiv, men inte antisymmetrisk (ty t.ex. $1 \mid -1$, $-1 \mid 1$, men $1 \neq -1$). (Definierad på $\mathbb{N}$ är $\mid$ en (icke-strikt) partialordning.))

4. $\mathcal{Q}$ är: reflexiv omm $f = id_X$, symmetrisk omm $f \circ f = id_X$ (dvs $f = f^{-1}$), antisymmetrisk omm för alla $x \in X$: $(f \circ f)(x) = x \Rightarrow f(x) = x$ (dvs grafen (med "punkter och pilar") saknar 2-cykler), transitiv omm $f \circ f = f$.

5. (Minst en av $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}x$, $x = y$ är sann omm inte alla $x\not\mathcal{R}y$, $y\not\mathcal{R}x$, $x \neq y$ är sanna, dvs omm $(x\not\mathcal{R}y$ och $y\not\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$, så $\mathcal{R}$ är sammanhängande omm $\not\mathcal{R}$ är antisymmetrisk. Negation ger alltså en bijektion (ty negationen av $\not\mathcal{R}$ är $\mathcal{R}$) mellan de sammanhängande och de antisymmetriska binära relationerna på X.)

6a. Enklast: X, Y, Z med $|X| = |Z| = 1$, $|Y| = 2$, f, g godtyckliga.
Allmänt måste f vara injektiv och g surjektiv.

b. T.ex. $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = \max(0, x - 1)$.
($X = Y = Z$ kan inte vara ändliga.)

7. f måste vara injektiv, g måste vara surjektiv.

8. (Låt $b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ för $i = 0, \ldots, n$ (så $b_0 = 0$). $b_i \equiv_n b_j$ för några $i < j$ (postfacksprincipen). $b_j - b_i = a_{i+1} + \ldots a_j$ etc.)

9. (Annars skulle $s(i)$ = 'maxlängden för växande delföljder från position i' och $t(i)$ = 'maxlängden för avtagande delföljder från position i' ge en injektion $(s,t) : \mathbb{N}_{mn+1} \hookrightarrow (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n)$.)

10a. (Om $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ kan $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ räknas upp enligt $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}, \ldots$ (där man hoppar över dubbletter).)

b. Ja. (den kan räknas upp som $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, \ldots$ (tag element med summan av indexen i växande ordning (och hoppa över dubbletter)).

c. Nej. (Vi visar en injektion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow X = \{f : \mathbb{N} \rightleftarrows \mathbb{N}\}$. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ är överuppräknelig (Cantor), så det ger att X också är det.
För varje $A \subseteq \mathbb{N}$ låter vi $g(A) \in X$ ges av att för alla $k \in \mathbb{N}$,
$$g(A)(2k) = \begin{cases} 2k, & \text{om } k \notin A \\ 2k+1, & \text{om } k \in A, \end{cases} \qquad g(A)(2k+1) = \begin{cases} 2k+1, & \text{om } k \notin A \\ 2k, & \text{om } k \in A. \end{cases} \;)$$

11. $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, given av $f((\ldots x_1 x_0)_2) = \{i \mid x_i = 1\}$, är bijektiv.
(Alt. $|\mathcal{P}(\{0,1,\ldots,n-1\})| (= 2^n) < \infty$ för $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0,1,\ldots,n-1\})$.)

12. Ja. (Låt $A = \{c_0, c_1, \ldots\}$. För varje $k \in \mathbb{N}$ är mängden $x \in B$ som svarar mot $n < k$ och $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$ ändlig etc. (För $A = \mathbb{Q}$, de rationella talen, fås att $\mathbb{A}$, mängden av alla algebraiska tal, är uppräknelig).)

13a. Nej. (g skulle behöva vara surjektiv, omöjligt (ty det finns en bijektion $h : \mathbb{N} \rightleftarrows \mathbb{Q}$, så $gh : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vore en surjektion).)

b. Ja. (T.ex. $f(x) = g(x) = x$ för $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = 0$ för $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.)

14a. (Induktion.)

b. (Tag determinanten av $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^n$ (eller induktion).)

c. (Betrakta följden $\{(F_n, F_{n+1}) \pmod{k}\}_{n=0}^{\infty}$ i $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_k$.
Enligt postfacksprincipen finns $r < s$ sådana att $(F_r, F_{r+1}) \equiv_k (F_s, F_{s+1})$, vilket ger $(F_0, F_1) \equiv_k (F_{s-r}, F_{s-r+1})$ (ty ...?), så $k \mid F_{s-r}$.)

d. (Induktion över $m \geq n$. Om $m = n$ eller $n = 0$ är påståendet uppenbart.
Låt $m > n > 0$. $\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^m$, så $F_m = F_{m-n}F_{n+1} + F_n F_{m-n-1}$, så $\operatorname{sgd}(F_m, F_n) = \operatorname{sgd}(F_{m-n}, F_n)$ (ty $\operatorname{sgd}(F_{n+1}, F_n) = 1$ med induktion) etc.)

15. (Om $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ så $3 \mid x$, så $3 \mid y$ etc.)

16. A och B är kungar och C är narr. (Låt A, B, C vara påståendena att respektive A, B, C är kung. Om A påstår p, vet vi att $A \leftrightarrow p$ är sann.
Det innebär i vårt problem att följande alla är sanna:
$A \leftrightarrow (B \to \neg C)$, $B \leftrightarrow (C \to \neg A)$, $C \leftrightarrow$"precis en kung".
(Det finns en sentens $((A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \ldots)$ som betyder "precis en av A, B, C är kung", men det är enklare att bara kalla den t.ex. q och finna dess sanningsvärden nedan "för hand".)
Sanningsvärdestabeller:

A	B	C	$A \leftrightarrow$	$(B \to$	$\neg C)$	$B \leftrightarrow$	$(C \to$	$\neg A)$	$C \leftrightarrow$	q
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0

Bara andra raden gör alla tre sentenserna sanna, vilket ger den enda möjligheten.
(Vi ser också att vi kunde ha löst problemet även om vi inte vetat vad en av A och B sade.)
(Alt. Antag att C är kung. Då talar hon sanning, och A och B är narrar. Men det gör A:s (och B:s) påstående(n) sant/sanna. Om C är narr är A:s och B:s påståenden sanna etc. (detta visar bara att ingen annan möjlighet finns, för att vara säker på att den löser problemet måste man kontrollera den (dvs, här, se att C ljuger).)

17. D och E är båda narrar. (Som i 16., $D \leftrightarrow (E \leftrightarrow (D \wedge E))$ är sann omm D svarade "ja". (D skulle påstå att E skulle svara "ja", vilket är sant omm $E \leftrightarrow (D \wedge E)$ är det.)

D	E	$D \leftrightarrow$	$(E \leftrightarrow$	$(D \wedge E))$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

Bara om sentensen är falsk (dvs D svarade "nej") kunde jag veta vad de var (sista raden). Så D svarade "nej" och de är båda narrar.)

18. (Om det kommer k blink från α-fyren och l från β-fyren mellan $t = 0$ och $t = n + 1$, vad är $k + l$?)