

Övning 7, on 13 december 2017

(Urvalsaxiomet får användas i alla uppgifter.)

1. Finn en överallt diskontinuerlig funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller
 $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ för alla $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Finn en icke-konstant periodisk funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som inte har någon minsta positiv period.
3. Låt p vara en $\mathcal{L}$ -sentens och Γ en mängd av $\mathcal{L}$ -sentenser. Antag att p och Γ har precis samma modeller. Visa att det finns en ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$, sådan att p och Γ' har precis samma modeller. p är alltså logiskt ekvivalent med konjunktionen av (de ändligt många) sentenserna i Γ' .
4. Låt åter p vara en $\mathcal{L}$ -sentens och Γ en mängd av $\mathcal{L}$ -sentenser. Antag att varje modell för p satisfierar minst en sentens i Γ . Visa att det finns en ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$ sådan att varje modell för p satisfierar minst en sentens i Γ' .
5. Låt Γ och Δ vara $\mathcal{L}$ -sentensmängder sådana att varje $\mathcal{L}$ -struktur är en modell för exakt en av Γ och Δ . Visa att det finns ändliga $\Gamma' \subseteq \Gamma$ och $\Delta' \subseteq \Delta$, sådana att Γ' har samma modeller som Γ och Δ' har samma modeller som Δ .
6. Visa att det finns en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^2$ med $|A \cap \ell| = 2$ för varje linje ℓ i $\mathbb{R}^2$.
7. Visa att det finns en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^2$ med $|A \cap (A + \mathbf{a})| = 1$ för alla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
8. Visa att det finns en mängd L av linjer i $\mathbb{R}^2$, sådan att varje $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ ligger på precis två linjer i L och varje linje i $\mathbb{R}^2$ är parallell (eller identisk) med precis en linje i L .
9. Visa att $\mathbb{R}^3$ är en disjunkt union av plana cirklar med radie 1.