

Övning 6, må 11 december 2017

1. Vilka ytantal är möjliga i en plan, reguljär, eulersk, enkel graf med v hörn?
2. Visa att man i en godtycklig graf $G = (V, E)$ kan rikta kanterna så att skillnaden mellan in- och utvalensen i varje hörn blir högst ett. (Invalensen $\delta^-(v)$ är antalet kanter som går in till hörnet v och utvalensen $\delta^+(v)$ antalet som går ut från det.)
3. Visa att om den planära sammanhängande grafen G har minst en cykel och samtliga cykler har längd minst $k \geq 3$ så gäller att

$$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2).$$

Använd sedan detta för att visa att Petersens graf, med grannlistan till vänster

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	inte är planär.
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e	(Ett åskådligt sätt att rita grafen är som en
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g	femhörning med hörn i ordningen $abcde$ och
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h	innanför dem deras respektive grannar $fghij$
										(som blir spetsar i en inre stjärna).)

Visa också med hjälp av dels Kuratowskis och dels Wagners sats (se planaritetsstencilen) att grafen inte är planär.

4. Visa att om grafen G är bipartit och k -reguljär så har G minst k olika fullständiga matchningar. Hur många finns det om $k = 2$?
5. Tio tentander har gjort en tentamen med tio uppgifter. Varje uppgift klarades av minst sex skrivande. Varje skrivande klarade minst fyra uppgifter. Visa att man kan fördela uppgifterna med en per tentand, så att var och en har klarat sin uppgift.
6. Starta från matchningen $M = \{a5, c4, d1\}$ och använd utökande alternerande stigar för att finna en max-matchning i den bipartita grafen $G = (X \cup Y, E)$ med $X = \{a, b, \dots, e\}$, $Y = \{1, 2, \dots, 5\}$, $E = \{a1, a5, b1, b4, c2, c4, d1, d3, e4, e5\}$.
7. Låt $X = A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$ vara två partitioner av en mängd X . Visa att det finns en gemensam transversal för de två partitionerna (en mängd $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ av n olika element med, för något $\pi \in S_n$, $x_i \in A_i \cap B_{\pi(i)}$ för $i = 1, 2, \dots$) omm för varje $k = 1, 2, \dots, n-1$, inga k A_i :n innehålls i unionen av $k-1$ B_j :n.
- 8a. Om alla 52 kort i en kortlek (med 4 kort av varje valör $(1, 2, \dots, 13)$) delas in i 13 högar med 4 kort i varje hög, är det säkert möjligt att välja ett kort ur varje hög så att de valda 13 korten innehåller ett av varje valör?
- b. Går det säkert om högarna innehåller 2, 3, 4, 4, $\dots$, 4, 5, 6 kort?
- c. Går det säkert om högarna innehåller 1, 2, 3, 4, 4, $\dots$, 4, 5, 6, 7 kort?
- d. Om man slumpmässigt drar ett kort ur en av högarna (åter 4 kort i varje), går det säkert att välja ett kort från var och en av de andra högarna så att man får 13 olika valörer?
9. Låt $M_0 = \{1, 2, \dots\}$, $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1, 2, 3\}, \dots$
 - a. Har $\{M_i\}_{i=0}^\infty$ någon transversal?
 - b. Uppfyller $\{M_i\}_{i=0}^\infty$ Halls villkor $|\bigcup_{i \in H} M_i| \geq |H|$ för alla $H \subseteq \mathbb{N}$?

10. Lös rekursionsproblemet (dvs finn alla följder $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ som uppfyller:)

$$\begin{cases} u_{n+2} + 8u_{n+1} - 9u_n = 8 \cdot 3^{n+1}, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_0 = 2, \quad u_1 = -6. \end{cases}$$

11. Låt h_n vara antalet sätt att dela in en konvex polygon R med $n + 1$ sidor ($n = 2, 3, \dots$) i triangelformade områden, genom att dra diagonaler (linjer mellan två hörn som inte är grannar) som inte korsar varandra inne i R (t.ex. är $h_2 = 1$, $h_3 = 2$, $h_4 = 5$). Låt också $h_1 = 1$.

Använd den genererande funktionen $H(x) = \sum_{n=1}^\infty h_n x^n$ för att bestämma h_n .

12. Finn antalet partitioner av talet 16 med varje del ett udda primtal.

13. Visa att antalet partitioner av $n \in \mathbb{N}$ där varje del är 1 eller 2 är lika med antalet partitioner av $n + 3$ med precis två, olika stora, delar.

14. Visa att för $k, n \in \mathbb{Z}_+$ är antalet partitioner av n med högst k delar av varje storlek lika med antalet partitioner av n där ingen del är en multipel av $k + 1$.

15. Visa att om $\{\mathfrak{A}_\iota\}_{\iota \in I}$, $|I| < \infty$, är $\mathcal{L}$ -strukturer för ett språk $\mathcal{L}$ och $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter på I är $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota / \mathcal{U} \cong \mathfrak{A}_{\iota_0}$ för ett $\iota_0 \in I$.

16. A är en mängd lampor, $3 \leq |A| < \infty$, som styrs av en mängd X (ändlig eller oändlig) vred, vart och ett med $|A|$ st olika (omärkta) lägen. Det är alltid precis en lampa som lyser och vilken det är bestäms helt av vredens lägen. Om läget för alla vreden ändras, ändras vilken lampa som lyser.

Visa att det finns ett ultrafilter på X som bestämmer vilken lampa som är tänd (och hur det bestäms).

17. Visa med naturlig deduktion (reglerna finns i "Om semantisk följd och bevis")

a. $A \rightarrow (B \vee C) \vdash \neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$,

b. $\vdash \neg \perp$,

c. $A, \neg A \vdash B$,

d. $\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow \neg Ryz) \vdash \exists y \forall x \neg Rxy$.