

## Övning 5, må 4 december 2017

1. En familj med två vuxna och två barn vill korsa en flod, men deras båt bär bara en vuxens vikt. Varje barn väger hälften så mycket som en vuxen. Använd en riktad graf för att finna ett sätt för dem att komma över floden.

2. Är graferna som ges av följande grannlistor isomorfa?

| a | b | c | d | e | f |     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|---|---|---|
| b | a | a | a | b | c | och | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| c | c | b | e | d | d |     | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| d | e | f | f | f | e |     | 6 | 5 | 6 | 1 | 6 | 5 |
|   |   |   |   |   |   |     |   |   |   |   |   |   |

3. Visa att varje graf  $G = (V, E)$  med  $|V| \geq 2$  har två hörn med samma valens (dvs  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$  med  $\delta(x) = \delta(y)$ ).

4. Finns i följande fall någon (enkel) graf med sju hörn och valenser:

i) 0, 2, 3, 3, 4, 4, 5,    ii) 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3,    iii) 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6 ?

5. Visa att om grafen  $G = (V, E)$  inte är sammanhängande så är komplementgrafen  $\overline{G} = (V, E^c)$  (där  $E^c = \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\}$ ) sammanhängande.

6. Visa att om grafen  $G = (V, E)$  med  $|V| = n$  uppfyller  $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$  för alla  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$  och  $\{x, y\} \notin E$ , så är  $G$  sammanhängande.

7. Finn det maximala antalet hörn i en graf med 28 kanter, om varje hörn har valens minst 3.

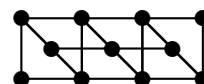
8. Finn antalet (icke-isomorfa) 4-reguljära grafer med sju hörn.

9. Visa att i en enkel graf  $G = (V, E)$  finns minst

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1}$$

oberoende hörn (dvs hörn, sådana att inga två av dem är grannar).

10. Är grafen till höger hamiltonsk?



11a. Visa att om  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  är udda (inte båda = 1) kan en springare inte i en följd drag besöka alla rutor på ett  $m \times n$ -schackbräde" precis en gång och återkomma till startpunkten. (En springare går i ett drag två rutor framåt och en åt sidan.)

b. Visa samma sak för ett bräde av format  $4 \times n$ ,  $n$  heltal.

12. En acyklisk graf (dvs en graf utan cykler) har 316 hörn och 302 kanter. Hur många komponenter har den?

13. Visa att hörnen i en graf kan färgas med högst två färger, så att varje hörn har samma färg som högst hälften av sina grannar.

14. Finn ordningar av hörnen i kubgrafen så att den giriga algoritmen för att färga dess hörn kräver respektive 2, 3 och 4 färger.

15. Visa att om  $\overline{G} = (V, E^c)$  är komplementgrafen till  $G = (V, E)$ , så är  $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq |V|$ .

**16.** Låt  $G = (V, E)$  vara en graf med  $|V| = n$ .

Visa att koefficienten för  $\lambda^{n-1}$  i det kromatiska polynomet  $P_G(\lambda)$  är  $-|E|$ .

**17.** Bestäm det kromatiska polynomet  $P_{C_5}(\lambda)$  för den cykliska grafen  $C_5$ , med kombinatoriskt resonemang ("fall för fall"). Jämför med det allmänna uttrycket som härleddes på föreläsningen,  $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$ .

**18.** Låt  $G = (V, E)$  vara en sammanhängande, 4-reguljär graf som också är planär. Hur många ytor har en plan bild av  $G$  om  $|E| = 16$ ?

**19.** I en sammanhängande, plan graf har varje hörn valens 3 eller 5. Antalet hörn är 12 och antalet ytor är 11. Hur många hörn har valens 3 och hur många har valens 5?

**20.** I en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf har alla ytor (också den obegränsade) antingen 4 eller 6 kanter (räknat med multiplicitet). Hur många ytor har 4 kanter?

**21.** Låt  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$  vara (enkla) grafer och definiera deras **lexikografiska produkt**  $G_1[G_2]$  som grafen  $(V_L, E_L)$  med

$$V_L = V_1 \times V_2 \text{ och } \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E_L \Leftrightarrow \begin{cases} \{u_1, v_1\} \in E_1 \text{ eller} \\ u_1 = v_1 \text{ och } \{u_2, v_2\} \in E_2. \end{cases}$$

Visa att  $\overline{G_1[G_2]} = \overline{G_1}[\overline{G_2}]$  (där  $\overline{G}$  är komplementgrafen till  $G$ ).

**22a\*.** Visa att om  $G = (V, E)$  är en graf, finns  $V_1, V_2$  sådana att  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  och de **inducerade delgraferna**  $(V_i, E \cap [V_i]^2)$ ,  $i = 1, 2$ , är jämna grafer (dvs alla deras hörn har jämna valenser).

**b.** Visa att om  $G = (V, E)$  är en graf, finns  $V_1, V_2$  sådana att  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  och  $(V_1, E \cap [V_1]^2)$  är jämn,  $(V_2, E \cap [V_2]^2)$  udda.  
( $[A]^2 = \{X \subseteq A \mid |X| = 2\}$ , mängden av delmängder av storlek 2 till mängden  $A$ .)

**23.** Grafen  $G = (V, E)$  (inte säkert enkel, så den kan ha öglor och multipla kanter) har det kromatiska polynomet  $P_G(\lambda)$ .

Visa att  $|P_G(-1)|$  är antalet acykliska orienteringar av  $G$

(antalet sätt att rikta  $G$ 's kanter så att ingen cykel kan genomlöpas i kanternas riktning).

(T.ex. är  $P_{C_3}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ , så  $|P_{C_3}(-1)| = 6$ , och av  $C_3$ 's  $2^3$  orienteringar har precis 2 en riktad cykel.)