

Övning 4, må 27 november 2017

1. Det går att fylla i vidstående tabell så att den blir multiplikationstabellen för en grupp, dess grupptabell. Gör det.

a. Är gruppen abelsk?

b. Vilket element är identitetsselement?

c. Bestäm inverser till alla element.

d. Bestäm ordningen för alla element och alla cykliska delgrupper till gruppen.

e. Beräkna $a * b * c * d * f * g$. (Behövs här inga parenteser?)

$*$	a	b	c	d	f	g
a			c			
b					d	c
c		f		g		
d				a		b
f		c	d			
g					a	

2. Visa att denna tabell inte är grupptabell för någon grupp:

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	e	c	d	a
c	c	d	a	b	e
d	d	c	e	a	b

3. Låt G vara en grupp med identitetsselement 1 och $a, b, c \in G$.

a. Givet att $\begin{cases} ax^2 = b \\ x^3 = 1 \end{cases}$ för något $x \in G$, finn alla sådana x .

b. Givet att $\begin{cases} (xax)^3 = bx \\ x^2a = (xa)^{-1} \end{cases}$ för något $x \in G$, finn alla sådana x .

c. Visa att $bac = a^{-1} \Rightarrow cab = a^{-1}$.

d. Visa att $(abc)^{-1} = abc \Rightarrow (bca)^{-1} = bca$.

e. Visa att $a^3 = 1 \Rightarrow a$ har en kvadratrot, dvs $a = r^2$ för något $r \in G$.

f. Visa att $b^2ab = a^{-1} \Rightarrow a$ har en tredjerot, dvs $a = s^3$ för något $s \in G$.

4. Kan denna tabell fortsättas till grupptabellen för en grupp?

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e				
a		e			
b					
c					
d					

5a. Finn den minsta delgrupp till $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ som innehåller elementen 3 och 7.

b. Finn den minsta sidoklass till en delgrupp till $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ som innehåller elementen 3 och 7.

6a. Visa att om H och K är delgrupper till gruppen G så är $H \cap K$ också det.

b. Visa att det inte finns någon grupp G med två delgrupper H och K , sådana att varken $H \subseteq K$ eller $K \subseteq H$, och $H \cup K$ är en delgrupp till G .

c. H och K är delgrupper till G med $|H| = 52$, $|K| = 151$. Vad är $|H \cap K|$?

7. Finn en icke-abelsk grupp av ordning 66.

8. Är gruppen $(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \cdot)$ cyklisk?

9. Låt (som vanligt) S_4 vara gruppen av alla permutationer av $\{1, 2, 3, 4\}$. Finn den minsta delgruppen till S_4 som innehåller permutationerna (123) och (34) .
10. Låt G vara en grupp och antag att $a, b \in G$ kommuterar, dvs $ab = ba$. Är det säkert sant att ab 's ordning $o(ab)$ uppfyller $o(ab) = \text{mgm}(o(a), o(b))$?
11. Visa att varje delgrupp till en cyklisk grupp är cyklisk.
12. Visa att varje grupp av ordning 55 har minst ett element av ordning 5 och minst ett av ordning 11.
13. Finn en grupp med 64 element, alla med ordning 1 eller 2.
14. Låt G vara S_4 , gruppen av permutationer av $\{1, 2, 3, 4\}$, och $N \subset G$ ges av (med elementen i cykelform) $N = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.
- a. Kalla hörnen i en regelbunden tetraeder för 1, 2, 3, 4. Elementen i G svarar då mot stela (dvs avståndsbevarande) avbildningar av rummet, vilka lämnar tetraedern invariant men permuterar hörnen. Ange för varje konjugatklass i G hurdana avbildningar dess element motsvarar.
- b. Vilken typ av avbildning motsvarar jämna respektive udda permutationer i G ?
- c. Visa att N är en **normal** delgrupp till G och beskriv kvotgruppen G/N (dvs ange en känd grupp som är isomorf med G/N).
15. Pelle skall tillverka kvadratiska brickor att sälja i sin heminredningsbutik. Brickorna har färgade (gula, röda eller blå) kulor i de fyra hörnen. Hur många väsentligt olika (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider dem) sådana brickor finns det i följande fall?
- a. Brickornas ovansidor och undersidor är lika, så de ser likadana ut om man vänder på dem.
- b. Brickornas ovansidor och undersidor är olika.
- c. Vad blir svaren i a. och b. om antalet olika färger på kulorna är k ?
16. Av sex lika långa sugrör formas en käck prydnad i form av en tetraeder (med sugrören som kanter). På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider dem i rummet) kan det göras, om man har sugrör av k olika färger att tillgå?