

Övning 3, må 20 november 2017

1. Visa att om $n, r, k \in \mathbb{N}$ med $n \geq r \geq k$ så är

$$\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{r-k}.$$

2. Visa att om $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$ så är

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k k(k-1) \binom{n}{k} = 0.$$

3. Finn koefficienten för x^{12} i polynomet $(4 + 3x^2)^{10}$.

4. Hur många udda tal mellan 1000 och 10 000 har fyra olika siffror?

5. Finn antalet sätt vi kan bilda "ord" som använder varje bokstav i ordet DISKRET exakt en gång, om inget av orden ED, TIK, DISK eller EDIKT får ingå som delord.

6. Finn antalet positiva heltal d som delar heltalet 129 600.

7. På hur många sätt kan femton (särskiljbara) elever i en klass placeras i tre (icke-tomma, identitetslösa) led?

8. Finn antalet sätt att dela upp mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i tre icke-tomma delmängder så att elementen 1 och 2 tillhör olika delmängder.

9. Åtta tärningar slås. Vad är sannolikheten att alla $1, 2, \dots, 6$ kommer upp?

10. Finn antalet lösningar till det diofantiska problemet

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

då vi kräver att $0 \leq x_1 \leq 5$, $-3 \leq x_2 \leq 3$ och $2 \leq x_3 \leq 9$.

11. På hur många sätt kan sju flickor och åtta pojkar delas in i tre grupper, så att varje grupp innehåller minst en pojke och minst en flicka?

12. På en föreläsning visades att om man utgår från 6 punkter och mellan varje par av dem drar antingen en röd eller en blå linje, uppstår minst en enfärgad triangel.

a. Visa att det i själva verket blir minst två enfärgade trianglar.

b. Visa att om man i stället utgår från 10 punkter och gör på samma sätt, uppstår antingen en helt röd triangel eller en helt blå "tetraeder" (dvs fyra punkter som alla parvis är förbundna med blå linjer).

c. Visa att det i b räcker med 9 punkter.

13. Hur många resultat är möjliga då man slår med n identiska tärningar?

(Med ett "resultat" menas en lista med antalen tärningar som visar varje antal ögon.)

14. Finn arean av en sfärisk triangel med vinklar α, β, γ på en sfär med radie R . En sfärisk triangel har delar av tre storcirklar som sidor och en sfär av radie R har area $4\pi R^2$.

15. På hur många sätt kan 7 kulor fördelas på 4 lådor i följande fall?

- a. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma,
- b. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma,
- c. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma,
- d. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma,
- e. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får vara tomma,
- f. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får inte vara tomma,
- g. Identiska kulor, identiska lådor, lådor får vara tomma,
- h. Identiska kulor, identiska lådor, lådor får inte vara tomma.

16. Låt $\sigma(n)$, för $n \in \mathbb{Z}_+$, vara summan av alla positiva delare till n . Vad är

$$\sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right) ?$$

($\sum_{d|n}$ betyder summan över alla **positiva** delare till n .)

17. Låt $\pi \in S_7$ ges av $\pi = (1\ 4)(2\ 6\ 3)(5\ 7)$.

- a. Hur många $\sigma \in S_7$ kommuterar med π , dvs uppfyller $\sigma\pi = \pi\sigma$?
- b. Hur många av σ :na i a. är udda permutationer?

18. I en radhuslänga med sex hus (med nr, i ordning, 1–6) bor sex gifta par (vart och ett bestående av en kvinna och en man), ett par i varje hus.

Var och en av kvinnorna har också (precis) en bror bland de sex männen och omvänt. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror.

Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (han bor i det ena gavelhuset, nr 1, och hans frus bror är hans systers man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus (förstås) och två svågrar.

a. I vilket hus bor Anders syster Anna?

b. I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor.

19. Om $n \in \mathbb{N}$, vad är

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} ?$$

Visa det. ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ är heltalsdelen av $\frac{n}{2}$, det största heltalet $\leq \frac{n}{2}$.)

20. Låt $\mathcal{R}$ vara en binär relation på en mängd X , med egenskapen att för varje följd $x_0, x_1, x_2, \dots$ från X finns $i, j \in \mathbb{N}$ med $i < j$ och $x_i \mathcal{R} x_j$.

Visa att det för varje följd $x_0, x_1, x_2, \dots$ från X finns en oändlig mängd $Y \subseteq \mathbb{N}$ sådan att $x_i \mathcal{R} x_j$ för alla $i, j \in Y$ med $i < j$.