

Övning 2, må 13 november 2017

1. Räcker följande information för att bestämma relationen $\mathcal{R}$?
 1. $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 2. $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 6)\} \subseteq \mathcal{R}$.
 3. $(2, 6) \notin \mathcal{R}$.
2. Beskriv alla ekvivalensrelationer $\mathcal{R}$ på $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ med
$$\{(1, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 6)\} \subseteq \mathcal{R}.$$
3. Är delbarhet på $\mathbb{Z}$ (dvs relationen $\mathcal{R}$ som definieras av $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m \mid n$ för alla $m, n \in \mathbb{Z}$) en partialordning?
4. Låt $f : X \rightarrow X$ vara en funktion på en mängd X och motsvarande binära relation på X vara $\mathcal{Q}$ (dvs för alla $x, y \in X$, $x\mathcal{Q}y \Leftrightarrow y = f(x)$). Vilka villkor på f svarar mot att $\mathcal{Q}$ är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv?
5. En binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X kallas **sammanhängande** (eng. **connected**) omm för alla $x, y \in X$ minst en av $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}x$, $x = y$ är sann. Visa att det för varje mängd X finns lika många sammanhängande som antisymmetriska relationer på X (minns att en binär relation $\mathcal{Q}$ på X kallas **antisymmetrisk** omm för alla $x, y \in X$ gäller att $(x\mathcal{Q}y \text{ och } y\mathcal{Q}x) \Rightarrow x = y$).
- 6a. Ge ett exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, sådana att sammansättningen $gf : X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det. Är någon av f och g nödvändigtvis injektiv eller surjektiv?
 - b. Samma uppgift, men dessutom villkoret att $X = Y = Z$.
7. Antag att $f : A \rightarrow B$ och $g : B \rightarrow A$ är sådana att
$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{för alla } x \in A.$$
Är någon av f och g nödvändigtvis injektiv, surjektiv eller bijektiv?
8. Visa att för varje följd $a_1, a_2, \dots, a_n$ av n heltal finns minst en icke-tom delföljd
$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t} \quad \text{sådan att} \quad a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_t} \equiv 0 \pmod{n}.$$
9. Låt $m, n \in \mathbb{Z}_+$ och $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ vara en följd av olika reella tal. Visa att det antingen finns en växande delföljd av längd $m + 1$ eller en avtagande av längd $n + 1$ (dvs $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}}$ med $i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}$ eller $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$ med $j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1}$).
- 10a. Visa att en union av ändligt många uppräknliga mängder är uppräknelig.
 - b. Om $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$, för $i \in \mathbb{N}$, måste $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ vara uppräknelig?
 - c. Är mängden av bijektioner $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uppräknelig?
11. Visa att mängden av alla **ändliga** mängder av naturliga tal är uppräknelig,
$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}| (= \aleph_0),$$
där $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty\}.$

12. Låt $A \subset \mathbb{R}$ vara uppräknelig. Är mängden lösningar till (icke-triviala) polynomekvationer med koefficienter i A säkert uppräknelig?

Dvs, måste B vara uppräknelig då

$$B = \{x \in \mathbb{C} \mid a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \text{ för några } n \in \mathbb{Z}_+, \\ a_i \in A \text{ för } i = 0, \dots, n, \text{ inte alla } a_i = 0\}?$$

13a. Finns det $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ och $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, med $gf : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$, en bijektion?

b. Finns det $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ och $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, med $fg : \mathbb{Q} \rightrightarrows \mathbb{Q}$, en bijektion?

14. Minns **fibonaccitalen** $F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a. Visa att $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = \sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

b. Visa att $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

c. Visa att för varje $k \in \mathbb{Z}_+$ finns ett $n \in \mathbb{Z}_+$ sådant att $k \mid F_n$.

d. Visa att $\text{sgd}(F_m, F_n) = F_{\text{sgd}(m,n)}$ för alla $m, n \in \mathbb{N}$.

15. Visa att om $x, y, z \in \mathbb{Z}$ uppfyller $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ så är $x = y = z = 0$.

16. På den fjärran Knarrön är varje invånare, som vi minns, antingen kung (och talar alltid sanning) eller narr (och ljugar alltid). A, B och C är knarröbor och yttrade en gång följande.

A: "C är narr om B är kung."

B: "A är narr om C är kung."

C: "Precis en av oss tre är kung."

Vad är var och en av A, B och C, kung eller narr?

17. På Knarrön träffade jag de två öborna D och E.

Jag frågade D: "Vad skulle E svara på frågan 'Är ni båda kungar??'".

D:s svar räckte för att jag skulle veta vad de var. Vad var de?

18. Två fyrar blinkar med intervall α respektive β (minuter). α och β är irrationella tal sådana att $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (dvs i medeltal kommer ett blink per minut).

Visa att om de båda blinkar vid tiden $t = 0$ kommer det under "heltalsminuten" mellan n och $n + 1$ precis ett blink, för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.