

**Svar och anvisningar för
hemuppgifter omgång 2,
(till ti 2 januari 2018)**

1. (0, 3p) Vi söker $f(d, n)$ ($d, n \in \mathbb{Z}_+$) med $\text{sgd}(m, n) = \sum_{d|m} f(d, n)$ för $m, n \in \mathbb{Z}_+$.
($\sum_{d|m}$ är summan över alla **positiva** delare d till m .)

Lösning: Enligt Möbius inversionsformel är $f(m, n) = \sum_{d|m} \mu(d) \text{sgd}(\frac{m}{d}, n)$ och eftersom $\text{sgd}(m, n)$ är en multiplikativ funktion av m (dvs $\text{sgd}(a \cdot b, n) = \text{sgd}(a, n) \cdot \text{sgd}(b, n)$ om $\text{sgd}(a, b) = 1$), är $f(m, n)$ också det (egenskap hos faltning, $f(\cdot, n) = \mu * \text{sgd}(\cdot, n)$, μ multiplikativ).

För $e \in \mathbb{Z}_+$, p primtal: $f(p^e, n) = \sum_{d|p^e} \mu(d) \text{sgd}(\frac{p^e}{d}, n) = \sum_{t=0}^e \mu(p^t) \text{sgd}(p^{e-t}, n) =$
 $= \mu(1) \text{sgd}(p^e, n) + \mu(p) \text{sgd}(p^{e-1}, n) = \begin{cases} p^e - p^{e-1}, & \text{om } p^e \mid n \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

Om p_i är olika primtal och $e_i \in \mathbb{Z}_+$ får vi $f(p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}, n) = f(p_1^{e_1}, n) \cdot \dots \cdot f(p_k^{e_k}, n)$, så (eftersom $\phi(p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}) = (p_1^{e_1} - p_1^{e_1-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{e_k} - p_k^{e_k-1})$ och $f(1, n) = \mu(1) \text{sgd}(1, n) = 1 = \phi(1)$):

Svar: $f(d, n) = \begin{cases} \phi(d), & \text{om } d \mid n, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

(Alt. (om man ser det): Eftersom $n = \sum_{d|n} \phi(d)$, är $\text{sgd}(m, n) = \sum_{d|m, d|n} \phi(d)$, vilket ger $f(d, n)$ som ovan.)

2. (0, 3p) G och H är grupper och L är en delgrupp till H .
Vi visar att om $h: G \rightarrow H$ är en homomorfi är $K = \{x \in G \mid h(x) \in L\}$ en delgrupp till G .

Lösning: Det räcker att visa *i)* $K \neq \emptyset$, *ii)* $x, y \in K \Rightarrow xy \in K$ och *iii)* $x \in K \Rightarrow x^{-1} \in K$. (enligt en känd sats; $K \subseteq G$ enligt definitionen).

i): $h(1) = 1 \in L$ (1 identitetselementet i G resp. H), så $1 \in K$,

ii): $x, y \in K \xrightarrow{\text{def. av } K} h(x), h(y) \in L \Rightarrow h(xy) \stackrel{h \text{ homom.}}{=} h(x)h(y) \stackrel{L \text{ delgrp}}{\in} L \xrightarrow{\text{def. av } K} xy \in K$,

iii): $x \in K \xrightarrow{\text{def. av } K} h(x) \in L \Rightarrow h(x^{-1}) \stackrel{h \text{ homom.}}{=} h(x)^{-1} \stackrel{L \text{ delgrp}}{\in} L \xrightarrow{\text{def. av } K} x^{-1} \in K$.

Saken är klar.

3. (0, 4p) Vi skall visa att antalet väsentligen olika armband med $n \in \mathbb{Z}_+$ st färgade pärlor (λ färger möjliga), grannar olikfärgade, på en sluten ögla av snöre är (summan över positiva d)

$$\frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} \phi(d) \left((\lambda - 1)^{\frac{n}{d}} + (-1)^{\frac{n}{d}} (\lambda - 1) \right) + \begin{cases} 0, & n \text{ udda,} \\ \frac{n}{2} \lambda (\lambda - 1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ jämnt.} \end{cases} \right)$$

Lösning: Burnsidess lemma (Thm 21.4 i Biggs). Vi finner $|F(g)|$ för varje symmetrirotation g :

typ av g	g :s permutation av pärlorna	antal g	$ F(g) $
rot $k \cdot \frac{2\pi}{n}$, $\text{sgd}(k, n) = d$, $k = 0, 1, \dots, n-1$	$[(\frac{n}{d})^d]$	$\phi(\frac{n}{d})$	$(\lambda - 1)^d + (-1)^d (\lambda - 1)$
n udda: vänd pk	$[1 \ 2^{\frac{n-1}{2}}]$	n	0
n jämnt: $\begin{cases} \text{vänd pp} \\ \text{vänd kk} \end{cases}$	$[1^2 \ 2^{\frac{n}{2}-1}]$ $[2^{\frac{n}{2}}]$	$\frac{n}{2}$ $\frac{n}{2}$	$\lambda(\lambda-1)^{\frac{n}{2}}$ 0

("rot v ": rotation vinkeln v kring en axel vinkelrät mot armbandets plan och genom dess medelpunkt,
"vänd xy": vändning kring en axel genom pärla(p) och/eller kant(k) mellan pärlor.)

$|F(g)|$: antalet g -invarianta (dvs samma färg på alla pärlor i samma cykel i g :s permutation) färgningar.

$|F(\text{rot})|$: d st cykler, med kanter mellan som en C_d (kromatiskt polynom $(\lambda - 1)^d + (-1)^d (\lambda - 1)$),

$|F(\text{vänd xk})| = 0$, ty pärlorna vid kanten "k" får inte ha samma färg,

$|F(\text{vänd pp})|$: cyklerna har kanter mellan som ett träd (en orm) med $(\frac{n}{2} + 1)$ st hörn.

Lemmat ger antalet färgningar: $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$, den önskade summan (byt $d \rightarrow \frac{n}{d}$).

(För $n = 1$ räknas den enda pärlan som granne till sig själv, så ingen tillåten färgning finns.) **Saken är klar.**

4. Vi skall visa att (a, 0,3p) grafen K_n för udda $n \in \mathbb{Z}_+$ är en kantdisjunkt union av en uppsättning hamiltoncykler och (b, 0,3p) grafen K_n för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ är en kantdisjunkt union av en uppsättning stigar, alla av olika längd.

Lösning: a. Som i ledningen numrerar vi hörnen $0, 1, \dots, n-1$ och finner $\frac{n-1}{2}$ st (n udda) kantdisjunkta hamiltoncykler i K_n .

För varje $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ ges en cykel av att olika hörn $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ är grannar i cykeln omm $i+j \equiv 2k-1$ eller $\equiv 2k \pmod{n-1}$ och hörn 0 är granne med hörnen $k, k+\frac{n-1}{2}$. De är hamiltoncykler (cykler genom alla hörn): $0 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k+1) \cdot (k-2) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+\frac{n-1}{2}) \cdot 0$ (där (a) tolkas som $(a-1) \pmod{n-1} + 1$). Cyklerna är kantdisjunkta och eftersom varje hörn i K_n har valens $n-1$ ingår var och en av dess kanter i precis en av cyklerna. **a. klart.**

b. För udda n , dela upp hamiltoncykel k från a. i två stigar av längd k och $n-k$. Det ger en stig av varje längd $1, 2, \dots, n-1$ och var och en av K_n 's kanter tillhör precis en av dem. För jämna n , bädda in grafen i en K_{n+1} och bilda $\frac{n}{2}$ hamiltoncykler i den som i a. Då det extra hörnet och dess kanter tas bort är K_n 's kanter en disjunkt union av (kanterna i) $\frac{n}{2}$ stigar, alla av längd $n-1$. Dela upp alla dessa (utom en) som i det förra fallet, så fås $n-1$ disjunkta stigar med längder $1, 2, \dots, n-1$ som innehåller alla K_n 's kanter. **b. klart.**

5. (0,4p) X är en mängd och $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Vi skall visa att $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter omm för varje $K \subseteq \mathcal{P}(X)$, $|K| < \infty$, både

1. $K \subseteq \mathcal{U} \Leftrightarrow \cap K \in \mathcal{U}$ och
 2. $K \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \Leftrightarrow \cup K \in \mathcal{U}$.
-

Lösning: Minns att $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ är ett ultrafilter på X omm $a.-d.$ är uppfyllda:

- a. $\emptyset \notin \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$,
- b. $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$,
- c. $(A \in \mathcal{U} \text{ och } A \subseteq C \subseteq X) \Rightarrow C \in \mathcal{U}$,
- d. $A \subseteq X \Rightarrow (A \in \mathcal{U} \text{ eller } A^c \in \mathcal{U})$.

Vi visar först "endast om", så vi antar $a.-d.$ och skall visa 1.-2.

$1 \Rightarrow$: Om $K = \emptyset$ är $\cap K = X \in \mathcal{U}$ enligt $a.$,

om $|K| \in \mathbb{Z}_+$ och $K \subseteq \mathcal{U}$ fås $\cap K \in \mathcal{U}$ med induktion över $|K|$ (bas ($|K| = 1$) klar, steg med $b.$),

$1 \Leftarrow$: Om $\cap K \in \mathcal{U}$: $A \in K \Rightarrow \cap K \subseteq A \in \mathcal{U}$ enligt $c.$, så $K \subseteq \mathcal{U}$,

$2 \Rightarrow$: Om $A \in K \cap \mathcal{U}$: $A \subseteq \cup K \in \mathcal{U}$ enligt $c.$,

$2 \Leftarrow$: Om $K \cap \mathcal{U} = \emptyset$: $K^{(c)} = \{A^c \mid A \in K\} \subseteq \mathcal{U}$ (enligt $d.$),

så $\cap K^{(c)} = (\cup K)^c \in \mathcal{U}$ (enligt $1 \Rightarrow$, för $K^{(c)}$), så $\cup K \notin \mathcal{U}$ (enligt $b.$, $a.$). **"Endast om" klart.**

För att visa "om" antar vi 1. och 2. och skall visa $a.-d.$

a : För $K = \emptyset$ ger $1 \Rightarrow$ att $\cap K = X \in \mathcal{U}$ och $2 \Leftarrow$ att $\cup K = \emptyset \notin \mathcal{U}$,

b : $K = \{A, B\} \subseteq \mathcal{U}$ ger med $1 \Rightarrow$ att $\cap K = A \cap B \in \mathcal{U}$,

c : $K = \{A, C\}$, $A \in \mathcal{U}$, $A \subseteq C$ ger med $2 \Rightarrow$ att $\cup K = A \cup C = C \in \mathcal{U}$,

d : $K = \{A, A^c\}$, $A \subseteq X$ ger $\cup K = X \in \mathcal{U}$ (enligt $a.$), så enligt $2 \Leftarrow$: ($A \in \mathcal{U}$ eller $A^c \in \mathcal{U}$).

"Om" klart.
