

Hemuppgifter omgång 2, hösten 2017

Lösningar (handskrivna, på svenska eller engelska) skall vara kursledaren tillhanda senast **ti 2 januari 2018** på sätt som kommer att anges på kurssidan. Glöm inte att skriva ditt namn och din mejladress på lösningarna.

Det är tillåtet att diskutera uppgifterna med kurskamrater, men inte att få hjälp från andra (inte heller från internet). Alla måste skriva sina egna lösningar och avskrivning är alltså inte tillåten (och skulle behandlas som fusk, om det hade förekommit).

För full poäng krävs klara och tydligt motiverade lösningar.

Poängen för inlämningsuppgifterna kommer att läggas till poängen på tentan, så som det beskrivs på kurssidan (totalpoängen på inlämningsuppgifterna kommer att rundas av till närmaste heltal; $x + 0,5$ ($x \in \mathbb{N}$) höjs till $x + 1$).

1. (0, 3p) Finn ett enkelt uttryck för $f(d, n)$ ($d, n \in \mathbb{Z}_+$) med egenskapen att

$$\text{sgd}(m, n) = \sum_{d|m} f(d, n) \text{ för alla } m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

($\sum_{d|m}$ betecknar som vanligt summan över alla **positiva** delare d till m .)

2. (0, 3p) Låt G, H vara grupper och L en delgrupp till H .

Visa att om $h: G \rightarrow H$ är en homomorfi (dvs för alla $g_1, g_2 \in G$ är $h(g_1 g_2) = h(g_1)h(g_2)$) så är $K = \{x \in G \mid h(x) \in L\}$ en delgrupp till G .

3. (0, 4p) Ett armband består av $n \in \mathbb{Z}_+$ st färgade pärlor uppträdda på en sluten ögla av snöre. Visa att antalet väsentligt olika sådana armband (dvs som inte kan roteras i rummet så de blir lika) med högst λ olika färger på pärlorna och inga pärlor av samma färg jämte varandra ges av

$$\frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} \phi(d) \left((\lambda - 1)^{\frac{n}{d}} + (-1)^{\frac{n}{d}} (\lambda - 1) \right) + \begin{cases} 0, & n \text{ udda,} \\ \frac{n}{2} \lambda (\lambda - 1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ jämnt.} \end{cases} \right)$$

(Summa över positiva d . ϕ är Eulers ϕ -funktion.)

Armbanden kan vändas och vridas och pärlorna ser likadana ut från båda håll.)

- 4a. (0, 3p) Visa att (kanterna i) den fullständiga grafen K_n för udda $n \in \mathbb{Z}_+$ är en disjunkt union av (kanterna i) en uppsättning hamiltoncykler.

[Ledning: Numrera hörnen $0, 1, \dots, n-1$. Anslut stigen $1, n-1, 2, n-2, 3, \dots$ och liknande till 0.]

- b. (0, 3p) Visa att (kanterna i) den fullständiga grafen K_n för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ är en disjunkt union av (kanterna i) en uppsättning stigar, alla av olika längd.

5. (0, 4p) Låt X vara en mängd och $\mathcal{U}$ en mängd delmängder till X , $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Visa att $\mathcal{U}$ är ett **ultrafilter** (enligt definitionen i "Om modeller och teorier") omm för varje **ändlig** mängd K av delmängder till X , $K \subseteq \mathcal{P}(X)$, $|K| < \infty$:

$$\begin{cases} 1. & K \subseteq \mathcal{U} & \Leftrightarrow & \cap K \in \mathcal{U}, \\ 2. & K \cap \mathcal{U} \neq \emptyset & \Leftrightarrow & \cup K \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

(Där $\cap K = \{x \in X \mid x \in A \text{ för alla } A \in K\}$ och $\cup K = \{x \in X \mid x \in A \text{ för minst ett } A \in K\}$.)