

Hemuppgifter omgång 1, hösten 2017

Lösningar (handskrivna, på svenska eller engelska) lämnas senast **må 4 december** kl. 12.00 (i sal K51, om de lämnas då).

Glöm inte att skriva ditt namn och din mejladress på lösningarna.

Man får diskutera uppgifterna med kurskamrater, men inte hämta hjälp från andra (inte heller från internet). Alla måste formulera och skriva sina egna lösningar och avskrivning är alltså inte tillåten (skulle behandlas som fusk).

Full poäng kräver klara, systematiska, tydligt motiverade lösningar.

Poängen för inlämningsuppgifterna kommer att läggas till poängen på tentan, så som det beskrivs på kurssidan (totalpoängen på inlämningsuppgifterna kommer att rundas av till närmaste heltal; $x + 0,5$ ($x \in \mathbb{Z}$) höjs till $x + 1$).

1. (0,3p) Låt x, y vara positiva heltal, dvs $x, y \in \mathbb{Z}_+$, med $\text{sgd}(x, y) = 1$ och $z \in \mathbb{Z}$, $|z| < xy$. Visa att det finns $u, v \in \mathbb{Z}$ med $|u| < x$, $|v| < y$, sådana att

$$\frac{z}{xy} = \frac{u}{x} + \frac{v}{y}.$$

Finn också sådana u, v för $x = 711$, $y = 925$, $z = 76\,353$.

2. (0,3p) Finn alla $m, n \in \mathbb{N}$ ($= \{0, 1, 2, \dots\}$) sådana att

$$4953^m \cdot n \equiv 13\,383 \pmod{14\,553}.$$

3. Låt $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ vara binära relationer på mängderna X respektive Y .

- a. (0,3p) Definiera den binära relationen $\mathcal{T}$ på $X \times Y$ enligt

$$(x_1, y_1)\mathcal{T}(x_2, y_2) \text{ sann om en eller båda } \begin{cases} 1. x_1\mathcal{R}x_2, \\ 2. x_1 = x_2 \text{ och } y_1\mathcal{S}y_2 \end{cases} \text{ sann(a).}$$

Vilka av egenskaperna **reflexivitet, symmetri, antisymmetri, transitivitet och välgrundning** ärvs av $\mathcal{T}$ från $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$?

(Dvs, för var och en av egenskaperna, om $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$ båda har den, måste $\mathcal{T}$ ha den?)

- b. (0,3p) Låt $n \in \mathbb{N}$ vara udda och ≥ 3 . Definiera den binära relationen $\mathcal{Q}$ på X^n ($= X \times X \times \dots \times X$, n st) enligt majoritetsbeslut, dvs

$$(u_1, \dots, u_n)\mathcal{Q}(v_1, \dots, v_n) \text{ sann om } |\{i \in \mathbb{N}_n \mid u_i\mathcal{R}v_i\}| > |\{i \in \mathbb{N}_n \mid u_i\not\mathcal{R}v_i\}|.$$

Vilka av egenskaperna (som i uppgift a) ärvs av $\mathcal{Q}$ från $\mathcal{R}$?

4. (0,3p) De ändliga mängderna X, Y, Z har $|X| = k \leq |Y| = m \leq |Z| = n$. För hur många olika par (f, g) , där $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, är $gf: X \rightarrow Z$ en **injektion**? (Svaret får innehålla k, m, n , potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

5. $\pi, \sigma \in S_{11}$ (mängden av permutationer av $\mathbb{N}_{11} = \{1, 2, \dots, 11\}$) ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi(i)$	9	11	2	3	10	1	4	5	6	8	7
$\sigma(i)$	11	10	1	3	9	5	4	2	6	8	7

- a. (0,2p) Finn antalet $\tau \in S_{11}$ som uppfyller $\tau\pi = \sigma\tau$ och ange ett sådant τ .
b. (0,3p) Finn alla $\tau \in S_{11}$ som uppfyller $\tau\pi = \sigma\tau^{-1}$.