

Hemuppgifter omgång 1, hösten 2016

Lösningar (handskrivna, på svenska eller engelska) lämnas senast **må 28 november** kl. 12.00 (i sal V21, om de lämnas då).

Glöm inte att skriva ditt namn och din mejladress på lösningarna.

Det är tillåtet att diskutera uppgifterna med kurskamrater, men inte att få hjälp från andra (inte heller från internet). Alla måste skriva sina egna lösningar och avskrivning är alltså inte tillåten (och skulle behandlas som fusk, om det hade förekommit).

För full poäng krävs klara och tydligt motiverade lösningar.

Poängen för inlämningsuppgifterna kommer att läggas till poängen på tentan, så som det beskrivs på kurssidan (totalpoängen på inlämningsuppgifterna kommer att rundas av till närmaste heltal; $x + 0.5$ ($x \in \mathbb{Z}$) höjs till $x + 1$).

1. (0.3p) Finn alla par $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ sådana att $3150^m \equiv 6895^n \pmod{7007}$.
($7007 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$).

2. Låt $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, mängden av alla mängder av naturliga tal.

a. (0.2p) Definiera den binära relationen $\mathcal{R}$ på X så att för alla $A, B \in X$:

$$A \mathcal{R} B \quad \text{om} \quad |A \triangle B| < \infty.$$

Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation? Vilka av egenskaperna som krävs har $\mathcal{R}$?

Om $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, hur ser dess ekvivalensklasser ut?

b. (0.2p) Definiera den binära relationen $\mathcal{Q}$ på X så att för alla $A, B \in X$:

$$A \mathcal{Q} B \quad \text{om} \quad |B \setminus A| < \infty.$$

Är $\mathcal{Q}$ en partialordning? Vilka av egenskaperna som krävs har $\mathcal{Q}$?

($M \setminus N$ betecknar differensmängden av M och N , dvs $\{x \in M \mid x \notin N\}$).

$M \triangle N$ betecknar den symmetriska differensen av M och N , dvs $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.

$|M| < \infty$ betyder förstås att mängden M är ändlig.)

3. (0.3p) De ändliga mängderna A, B, Y har $|A| = a \leq |B| = b \leq |Y| = n$ och $A \cap B = \emptyset$. Hur många $f: A \cup B \rightarrow Y$ har $f|_A$ injektiv och uppfyller att f antar varje värde i $f[A]$ exakt två gånger? ($f|_A: A \rightarrow Y$ är restriktionen av f till A , $f|_A(x) = f(x)$ för alla $x \in A$. $f[A]$ är bilden av A under f , $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$.)

4a. (0.2p) För hur många $\sigma \in S_7$ är $\sigma^2 = id$, identitetspermutationen?

b. (0.2p) För hur många $\pi \in S_9$ finns precis ett $\sigma \in S_9$ med $\pi = \sigma^2$?

c. (0.2p) För hur många $\sigma \in S_{11}$ är $\sigma^2 = \pi = (1 \ 11 \ 7)(2 \ 6 \ 3)(4 \ 10 \ 5) \in S_{11}$?

(S_n betecknar, som vanligt, mängden av permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.)

5a. (0.2p) Låt $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ och $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ vara två talföljder.

Visa att, för alla $n \in \mathbb{N}$, om en av följande gäller, så gäller båda:

$$\begin{cases} a_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} b_i, & \text{alla } k = 0, 1, \dots, n, \\ b_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a_i, & \text{alla } k = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

b. (0.2p) Finn **med hjälp av resultatet i a.** (även om a. inte gjorts) antalet "derangemang" (eng. derangements, Biggs, sid. 113–4) av en mängd med n element.