

Lösningar tentan SF1662 DISKRET MATEMATIK, 31 maj 2017

Tryckfel kan förekomma.

1) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{741}$ som uppfyller $348x = 42$ (i $\mathbb{Z}_{741}$).

Lösning: Ekvationen betyder för $x \in \mathbb{Z}$ att $741 \mid (42 - 348x)$, dvs $348x + 741y = 42$ för något $y \in \mathbb{Z}$. Vi använder Euklides algoritm:

$$\left\{ \begin{array}{l} 741 = 348 \cdot 2 + 45, \\ 348 = 45 \cdot 7 + 33, \\ 45 = 33 \cdot 1 + 12, \\ 33 = 12 \cdot 2 + 9, \\ 12 = 9 \cdot 1 + 3, \\ 9 = 3 \cdot 3 + 0 \end{array} \right. \quad \text{så } \text{sgd}(741, 348) = 3 \text{ och} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 = 12 - (33 - 2 \cdot 12) = \\ = -33 + 3(45 - 33) = \\ = 3 \cdot 45 - 4(348 - 7 \cdot 45) = \\ = -4 \cdot 348 + 31(741 - 2 \cdot 348) = \\ = 31 \cdot 741 - 66 \cdot 348. \end{array} \right.$$

Det ger (dividera med 3) $1 = 247 \cdot 31 - 116 \cdot 66$ medan $348x + 741y = 42 \Leftrightarrow 116x + 247y = 14$.

En lösning är alltså $x_0 = 14(-66) = -924$, $y_0 = 14 \cdot 31 (= 434)$.

Om x, y är en lösning fås $116(x - x_0) = -247(y - y_0)$, så $(\text{sgd}(116, 247) = 1)$ $247 \mid (x - x_0)$ och $x = x_0 + 247k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Omvänt ger det lösningar (med $y = y_0 - 116k$) för alla $k \in \mathbb{Z}$. $x \in \{0, 1, \dots, 740\}$ för $k = 4, 5, 6$. Det ger $x = 64, 311, 558$.

Svar: Alla lösningar till ekvationen är $x = 64, 311, 558$.

(Det går också bra att använda Eulers metod, $348x + 741y = 42 \Leftrightarrow x = -2y + \frac{42-45y}{348}$, $45y + 348z = 42$ etc.)

2) (3p) Vi skall visa att $\sum_{k=1}^n (F_{2k-2}F_{2k-1} + F_{2k-1}F_{2k}) = (F_{2n})^2$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

$\{F_n\}_{n=0}^\infty$ är Fibonacci-talen definierade av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N}$.

Lösning: Låt P_n vara det givna påståendet. Vi visar P_n för alla $n \in \mathbb{N}$ med induktion.

Bas: P_0 är sant, ty $\text{VL}_0 = 0 = (F_0)^2 = \text{HL}_0$.

Steg: Antag P_r för ett godtyckligt $r \in \mathbb{N}$, dvs $\text{VL}_r = \text{HL}_r$.

Då är $\text{VL}_{r+1} = \text{VL}_r + (F_{2r}F_{2r+1} + F_{2r+1}F_{2r+2}) \stackrel{\text{IA}}{=} (F_{2r})^2 + F_{2r}F_{2r+1} + F_{2r+1}F_{2r+2} = F_{2r}(F_{2r} + F_{2r+1}) + F_{2r+1}F_{2r+2} = F_{2r}F_{2r+2} + F_{2r+1}F_{2r+2} = (F_{2r} + F_{2r+1})F_{2r+2} = (F_{2r+2})^2 = \text{HL}_{r+1}$.

Så P_0 är sant och $P_r \Rightarrow P_{r+1}$ för alla $r \in \mathbb{N}$. **Saken är klar** (enligt induktionsprincipen).

3) (3p) Vi söker antalet injektioner $f: X \rightarrow Y$ (med $X = \{1, 2, \dots, 18\}$ och $Y = \{1, 2, \dots, 25\}$) sådana att för varje $y \in Y$ med $5 \mid y$ finns $x \in X$ med $5 \nmid x$ och $y = f(x)$.

Lösning: De x som f tar till respektive 5, 10, 15, 20, 25 (5 st) kan väljas bland elementen i $X \setminus \{5, 10, 15\}$ (15 st) på $(15)_5 = \frac{15!}{(15-5)!}$ sätt (injektion 5-mängd $\rightarrow$ 15-mängd).

Värdena för återstående 13 st x kan väljas bland elementen i $Y \setminus \{5, 10, 15, 20, 25\}$ (20 st) på $(20)_{13} = \frac{20!}{(20-13)!}$ sätt (injektion 13-mängd $\rightarrow$ 20-mängd).

Det sökta antalet funktioner blir $\frac{15!}{10!} \cdot \frac{20!}{7!}$ (multiplikationsprincipen).

Svar: Antalet sådana injektioner är $\frac{15! \cdot 20!}{10! \cdot 7!}$ (= 173 952 493 584 629 760 000).

4) G är gruppen $(U(\mathbb{Z}_{28}), \cdot)$ och H är den minsta delgruppen till G som innehåller 9. Vi skall (a, 1p) finna alla G :s element och (b, 2p) finna alla H :s element och sidoklasser.

Lösning: a. Eftersom $U(\mathbb{Z}_{28})$ består av alla $x \in \mathbb{Z}_{28}$ som uppfyller $\text{sgd}(x, 28) = 1$ och $28 = 2^2 \cdot 7$, är $G = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\}$.

b. H består av alla potenser av 9 (de bildar en delgrupp och måste alla ingå i H). Man finner $9^2 = 25$, $9^3 = 9 \cdot 25 = 1$, så $H = \{1, 9, 25\}$.

Sidoklasserna (G är abelsk, så vänster- = högersidoklasser) blir $3H = \{3, 27, 19\} = 19H = 27H$, $5H = \{5, 17, 13\} = 13H = 17H$, $11H = \{11, 15, 23\} = 15H = 23H$.

Svar a: $G = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\}$,

b: $H = \{1, 9, 25\}$ och sidoklasserna är H och $\{3, 19, 27\}$, $\{5, 13, 17\}$, $\{11, 15, 23\}$.

5) (3p) Vi söker alla värden $P_G(2)$ (antalet hörnfärgningar av grafen G med högst 2 färger) kan anta.

Lösning: Betrakta enligt ledningen först en (icke-tom) sammanhängande graf. Den kan färgas med 2 färger på antingen 0 sätt (om den inte är bipartit) eller 2 sätt (om den är bipartit (mellan två godtyckliga hörn går en stig och hörnen i stigen växlar mellan färgerna i en 2-färgning, så en 2-färgning är helt bestämd av färgen på ett hörn)). Enligt multiplikationsprincipen ges antalet sätt att färga en godtycklig graf av produkten av antalen för komponenterna.

Svar: $P_G(2)$ kan vara 0 eller 2^k , där k är antalet komponenter i grafen.

6) $\pi, \sigma \in S_7$ ges av tabellen till höger. Vi skall (a, 1p) ge π och $\pi\sigma$ i cykelnotation, (b, 1p) finna ett $\tau \in S_7$ med $\pi\sigma = \tau^2$ eller förklara varför inget sådant τ finns och (c, 2p) för den binära relationen $\mathcal{R}$ på S_7 given av att $\alpha\mathcal{R}\beta$ är sann om $\alpha\beta = \gamma^2$ för något $\gamma \in S_7$, avgöra om $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	6	7	1	4	5	3	2
$\sigma(i)$	5	1	2	7	3	4	6

Lösning: a. $\pi(1) = 6, \pi(6) = 3, \pi(3) = 1, \pi(2) = 7, \dots$ ger $\pi = (163)(27)$ och $\pi\sigma(1) = \pi(5) = 5, \pi\sigma(5) = \pi(3) = 1, \pi\sigma(2) = \pi(1) = 6, \dots$ ger $\pi\sigma = (15)(264)(37)$.

b. Ja, $\pi\sigma = \tau^2$ om (t.ex.) $\tau = (1357)(246)$ (den enda andra möjligheten är $\tau = (1753)(246)$).

c. $\mathcal{R}$ är reflexiv, dvs $\pi\mathcal{R}\pi$ är sann för alla $\pi \in S_7$, ty $\pi\pi = \gamma^2$ om $\gamma = \pi$.

$\mathcal{R}$ är symmetrisk, dvs $\pi\mathcal{R}\sigma \Rightarrow \sigma\mathcal{R}\pi$ för alla $\pi, \sigma \in S_7$, ty om $\pi\mathcal{R}\sigma$ är sann finns $\gamma \in S_7$ med $\pi\sigma = \gamma^2$, så $\sigma\pi = \sigma\pi\sigma\sigma^{-1} = \sigma\gamma^2\sigma^{-1} = (\sigma\gamma\sigma^{-1})^2$ och $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in S_7$.

$\mathcal{R}$ är inte transitiv, dvs om $\pi\mathcal{R}\sigma$ och $\sigma\mathcal{R}\tau$ är sanna behöver inte $\pi\mathcal{R}\tau$ vara sann, ty om $\pi = (12345), \sigma = id, \tau = (456)$ är $\pi\sigma = \pi = (14253)^2$ (så $\pi\mathcal{R}\sigma$ sann) och $\sigma\tau = \tau = (465)^2$ (så $\sigma\mathcal{R}\tau$ sann), men $\pi\tau = (1234)(56)$ som inte är en kvadrat (kvadraten av en cykel av jämn längd är två cykler av halva längden, den av en cykel av udda längd är en cykel av samma längd, så i en kvadrat av en permutation måste jämna cykellängder förekomma ett jämnt antal gånger) (så $\pi\mathcal{R}\tau$ inte sann).

Svar a: $\pi = (163)(27), \pi\sigma = (15)(264)(37),$ **b:** $\tau = (1357)(246),$
c: $\mathcal{R}$ är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv.

7) (4p) Vi söker antalet sätt att fördela kakor av 4 sorter (de av samma sort identiska) med en kaka var bland 8 (särskiljbara) barn, då varje typ av kaka används, högst 4 kakor av varje sort.

Lösning: Det gäller tydligen antalet surjektioner från en 8-mängd (barnen) till en 4-mängd (kakorna) där varje värde antas högst 4 gånger.

Totala antalet surjektioner är $4! \cdot S(8, 4) = 4! \cdot 1701$ (känd sats: antalet surjektioner n -mängd $\rightarrow k$ -mängd är $k! \cdot S(n, k)$; stirlingtalet $S(8, 4)$ fås ur "triangeln" till höger) och från dem dras de där något värde tas 5 gånger (fler går inte), $4 \cdot \binom{8}{5} \cdot 3! = 4! \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4! \cdot 56$ st (5 av vilken kaktyp?, vilka 5 barn får den?, vilka typer får övriga barn?).

			1		
		1		1	
	1		3		1
1	15	7		6	1
31		90		65	
	301		350		
		1701			

Svar: Antalet sådana fördelningar är $4! \cdot 1701 - 4! \cdot 56 (= 39480)$.

8) Se nedan efter 9).

9) (5p) Vi söker en största gemensam delare till $104 - 26i$ och $50 - 55i$ i $\mathbb{Z}[i]$ och $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ sådana att $(104 - 26i)a + (50 - 55i)b =$ den största gemensamma delaren.

Lösning: Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 104 - 26i = (50 - 55i)(1 + i) + (-1 - 21i), \\ 50 - 55i = (-1 - 21i)(3 + 2i) + (11 + 10i), \\ -1 - 21i = (11 + 10i)(-1 - i) + 0 \end{cases}$$
 så en $\text{sgd}(104 - 26i, 50 - 55i) = 11 + 10i$
(notera att man t.ex. kan approximera kvoten $\frac{104-26i}{50-55i}$ med $\frac{4-i}{2-2i}$, runda av i $\mathbb{Z}[i]$ (och korrigera om resten blir för stor)),
så $11 + 10i = (50 - 55i) - (3 + 2i)((104 - 26i) - (1 + i)(50 - 55i)) =$
 $= (-3 - 2i)(104 - 26i) + (2 + 5i)(50 - 55i).$

Svar: En $\text{sgd}(104 - 26i, 50 - 55i) = 11 + 10i, a = -3 - 2i, b = 2 + 5i$ är möjliga.

(Alla största gemensamma delare är som vanligt ± 1 eller $\pm i$ gånger ovanstående.

Alla möjliga a, b ges av $a = (-3 - 2i) + 5ik, b = (2 + 5i) + (4 - 6i)k, k \in \mathbb{Z}[i]$, ex. $a = 2 - 2i, b = -4 + i$.

$104 - 26i = 26(4 - i), 50 - 55i = 5(10 - 11i)$, så uppgiften kan också ganska enkelt lösas med primfaktoriserings.)

8) För $n, d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_+$ ska vi visa (a, 1p) att om $T = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ är ett träd och $\delta(v_i) = d_i$ (för $i = 1, 2, \dots, n$) så är $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ och (b, 3p) att om $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ så finns ett träd $T = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ med $\delta(v_i) = d_i$ (för $i = 1, 2, \dots, n$).

Lösning: a. För varje graf är $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$ och för ett träd (med $V \neq \emptyset$) är $|E| = |V| - 1$, så här $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2n - 2$. **a-Saken är klar.**

b. Vi antar att $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ och visar med induktion över n att det finns ett träd $T = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ med $\delta(v_i) = d_i$ för $i = 1, 2, \dots, n$.

(n kan inte vara 1 (men påståendet skulle stämma om vi i det fallet tillåte $d_1 = 0$).)

För $n = 2$ är påståendet sant, ty enda möjligheten är $d_1 = d_2 = 1$, med trädet $\bullet - \bullet$.

Antag att $n \geq 3$ och att påståendet är riktigt för alla mindre värden på n .

Då finns minst ett $d_r = 1$ (alla $d_i \geq 2$ skulle ge $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2n > 2n - 2$) och dessutom finns minst ett $d_s > 1$ (alla $d_i = 1$ skulle ge $\sum_{i=1}^n d_i = n < 2n - 2$ då $n > 2$).

Vi numrerar om d :na så att $r = n$, $s = n - 1$ och låter $d'_i = d_i$ för $i = 1, 2, \dots, n - 2$ och $d'_{n-1} = d_{n-1} - 1$. Då fås $d'_i \in \mathbb{Z}_+$ för $i = 1, \dots, n - 1$ och $\sum_{i=1}^{n-1} d'_i = \sum_{i=1}^{n-1} d_i - 1 = \sum_{i=1}^n d_i - 2 = (2n - 2) - 2 = 2(n - 1) - 2$, så enligt antagandet finns ett träd T' med $n - 1$ hörn och valenserna d'_i . Om vi till T' lägger ett hörn och en kant från det till hörnet med valens d'_{n-1} fås ett träd (tydliggen sammanhängande och den nya kanten kan inte ingå i en cykel då dess ena hörn har valens 1) T med n hörn och valenser d_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

b-Saken är också klar.

9) Se ovan före 8).

10) $X = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$ och $\pi \in S_{18}$ ges av:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\pi(i)$	7	11	9	5	14	16	12	1	8	10	2	3	15	4	18	6	13	17

Vi söker (a, 1p) antalet $f: X \rightarrow X$ med $\pi \circ f = f$, (b, 1p) antalet $f: X \rightarrow X$ med $f \circ \pi = f$ och (c, 3p) det maximala antalet element i en mängd M av funktioner $X \rightarrow X$, sådan att $(f, g \in M, f \neq g) \Rightarrow (f \circ \pi^n \neq g \text{ för alla } n \in \mathbb{Z})$.

Lösning: I cykelform är $\pi = (1 \ 7 \ 12 \ 3 \ 9 \ 8)(2 \ 11)(4 \ 5 \ 14)(6 \ 16)(10)(13 \ 15 \ 18 \ 17)$, så cykelstrukturen är $[1 \ 2^2 \ 3 \ 4 \ 6]$.

a. $\pi(f(i)) = f(i)$, alla $i \in X$, omm $f(i) = 10$ (π :s enda fixpunkt), alla $i \in X$. Bara en möjlighet.

b. $f(\pi(i)) = f(i)$ omm alla i i samma π -cykel ger samma $f(i)$, så antalet sådana f är 18^6 (multiplikationsprincipen, värdena för de 6 cyklerna kan väljas fritt i X och $|X| = 18$).

c. Låt $G = \langle \pi \rangle$, den cykliska delgruppen till S_{18} som genereras av π . G verkar på X och därmed på $f: X \rightarrow X$ ("färgningar av X med 18 färger") och $|G| = \text{mgm}(\pi\text{:s cykellängder}) = 12$. Villkoret på M säger precis att den inte innehåller mer än en funktion i samma G -bana, så det sökta antalet är antalet sådana banor. Vi använder Burnsides lemma och behöver $|Y_g|$, antalet $f: X \rightarrow X$ som π lämnar fixa. De fås som i b. ovan:

g	cykler i g :s permutation av X	antal g	$ Y_g $
$\pi^0 = id$	$[1^{18}]$	1	18^{18}
$\pi^{1,5,7,11}$	$[1 \ 2^2 \ 3 \ 4 \ 6]$	4	18^6
$\pi^{2,10}$	$[1^5 \ 2^2 \ 3^3]$	2	18^{10}
$\pi^{3,9}$	$[1^4 \ 2^5 \ 4]$	2	18^{10}
$\pi^{4,8}$	$[1^9 \ 3^3]$	2	18^{12}
π^6	$[1^{14} \ 2^2]$	1	18^{16}

Antalet banor enligt lemmat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y_g| &= \frac{1}{12} (18^{18} + 4 \cdot 18^6 + 2 \cdot 18^{10} + 2 \cdot 18^{12} + 18^{16}) = \\ &= \frac{1}{12} (18^{18} + 18^{16} + 2 \cdot 18^{12} + 4 \cdot 18^{10} + 4 \cdot 18^6). \end{aligned}$$

Svar a: 1, b: 18^6 (= 34 012 224),

c: $\frac{1}{12} (18^{18} + 18^{16} + 2 \cdot 18^{12} + 4 \cdot 18^{10} + 4 \cdot 18^6)$ (= 3 288 987 494 528 158 302 912).