

Lösningar tentan SF1662 DISKRET MATEMATIK, 16 augusti 2017

Tryckfel kan förekomma.

1) (3p) Vi ska avgöra om $127 \in \mathbb{Z}_{906}$ är inverterbart och i så fall finna en invers.**Lösning:** Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 906 = 127 \cdot 7 + 17, \\ 127 = 17 \cdot 7 + 8, \\ 17 = 8 \cdot 2 + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{så } \text{sgd}(906, 127) = 1, \\ \text{(dvs } 127 \text{ är inverterbart)} \end{array} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 1 = 17 - 2(127 - 7 \cdot 17) = \\ = -2 \cdot 127 + 15(906 - 7 \cdot 127) = \\ = 15 \cdot 906 - 107 \cdot 127. \end{cases}$$

Det ger $127^{-1} = -107 = 906 - 107 = 799 \in \mathbb{Z}_{906}$.**Svar:** $127 \in \mathbb{Z}_{906}$ är inverterbart och inversen är $127^{-1} = 799$.(Alternativt med Eulers metod, $127x + 906y = 1 \Leftrightarrow x = -7y + \frac{1-17y}{127} = -7y + z$, $17y + 127z = 1$ etc.)2) (3p) Vi skall visa att $a_n = 2^{n+1} - 3^n - 4^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$,
om $a_0 = 0$, $a_1 = -3$ och $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.**Lösning:** Med $\text{VL}_k = a_k$, $\text{HL}_k = 2^{k+1} - 3^k - 4^k$, låt P_n vara påståendet att $\text{VL}_k = \text{HL}_k$ för $k = n$ och $k = n+1$. Vi visar P_n för alla $n \in \mathbb{N}$ med induktion, det ger $\text{VL}_n = \text{HL}_n$ för $n \in \mathbb{N}$.**Bas:** P_0 är sant, ty $a_0 = 0 = 2^1 - 3^0 - 4^0$ och $a_1 = -3 = 2^2 - 3^1 - 4^1$.**Steg:** Antag P_r för ett godtyckligt $r \in \mathbb{N}$, dvs $\text{VL}_r = \text{HL}_r$ och $\text{VL}_{r+1} = \text{HL}_{r+1}$.Då följer P_{r+1} , ty $\text{VL}_{r+1} = \text{HL}_{r+1}$ (enligt P_r) och

$$\begin{aligned} \text{VL}_{r+2} &= a_{r+2} = 6a_{r+1} - 8a_r + 3^r \stackrel{\text{IA}}{=} 6(2^{r+2} - 3^{r+1} - 4^{r+1}) - 8(2^{r+1} - 3^r - 4^r) + 3^r = \\ &= (6-4)2^{r+2} - (18-8-1)3^r - (6 \cdot 4 - 8)4^r = 2^{r+3} - 3^{r+2} - 4^{r+2} = \text{HL}_{r+2}. \end{aligned}$$

Så P_0 är sant och $P_r \Rightarrow P_{r+1}$ för alla $r \in \mathbb{N}$. **Saken är klar** (enligt induktionsprincipen).(Om $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3^n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$, gäller uttrycket för alla $n \in \mathbb{Z}$.)

3) (3p) Vi söker antalet sätt att ordna en kortlek med minst två hjärterkort jämte varandra.

Lösning: Det sökta antalet är (additionsprincipen) det totala antalet sätt att ordna 52 kort – antalet sätt att ordna dem med alla hjärterkort isolerade.Det blir $52! - (52-13)! \cdot (40)_{13} = 52! - \frac{39! \cdot 40!}{27!}$ (alla kort kan ordnas på 52! sätt; övriga kort på 39! sätt, sedan högst ett hjärterkort i varje uppkommet "fack" (injektion 13-mängd $\rightarrow$ 40-mängd, multiplikationsprincipen)).**Svar:** Antalet sådana ordningar är $52! - \frac{39! \cdot 40!}{27!}$ ($\approx 7,91 \cdot 10^{67}$).4) G är gruppen $(U(\mathbb{Z}_{42}), \cdot)$. Vi söker (a, 1p) alla G :s element och (b, 1p) definitionen av att $\phi: G \rightarrow G$ är en isomorfi och (c, 1p) ska avgöra om $\phi(g) = g^7$ för $g \in G$ ger en isomorfi.**Lösning:** a. Eftersom $U(\mathbb{Z}_{42})$ består av alla $x \in \mathbb{Z}_{42}$ som uppfyller $\text{sgd}(x, 42) = 1$ och $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, är $G = \{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41\}$.b. Att $\phi: G \rightarrow G$ är en isomorfi betyder (definition) att

$$\phi \text{ är en bijektion och } \phi(g \cdot h) = \phi(g) \cdot \phi(h) \text{ för alla } g, h \in G.$$

c. $\phi(g \cdot h) = (g \cdot h)^7 \stackrel{*}{=} g^7 \cdot h^7 = \phi(g) \cdot \phi(h)$ (vid $*$ användes att G är en abelsk grupp).Vi visar att ϕ är injektiv. G är ändlig, så det ger att ϕ är bijektiv och därmed en isomorfi.

$$\phi(g) = \phi(h) \Leftrightarrow g^7 \cdot (h^7)^{-1} = 1 \stackrel{*}{\Leftrightarrow} (g \cdot h^{-1})^7 = 1 \stackrel{**}{\Leftrightarrow} g \cdot h^{-1} = 1 \Leftrightarrow g = h, \text{ så } \phi \text{ är injektiv.}$$

(*: G abelsk. **: $\text{sgd}(|G|, 7) = \text{sgd}(12, 7) = 1$, så $o(g \cdot h^{-1}) \mid |G|, 7 \Rightarrow o(g \cdot h^{-1}) = 1 \Rightarrow g \cdot h^{-1} = 1$.)**Svar a:** $G = \{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41\}$,**b: Definierat ovan, c: Ja, detta ϕ definierar en isomorfi.**(Det råkade bli så att $\phi(g) = g$ för alla $g \in G$, vilket (om det visas) ger en annan lösning.)

5) (3p) Grafen $G = (V, E)$ är sammanhängande och ritad utan korsande kanter på en sfär. Av ytorna som G delar in sfären i har en 7, en 6, tre 5, sju 4 och alla andra 3 kanter. Vi vet att antalet hörn i G är lika med antalet ytor och söker detta antal.

Lösning: Låt antalet ytor med 3 kanter vara x . Då är $v = r = 1 + 1 + 3 + 7 + x = x + 12$ (vanliga beteckningar v, e, r) och summan av antalen kanter vid ytorna är $2e$ (varje kant räknas vid två ytor (eller dubbelt vid en)), så $2e = 7 + 6 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + x \cdot 3 = 56 + 3x$. G är plan och sammanhängande, så (Euler) $2 = v - e + r = (x + 12) - (28 + \frac{3}{2}x) + (x + 12)$, vilket ger $x = 12$ och $v = x + 12 = 24$.

Svar: Antalet hörn i grafen är 24.

6) (4p) 6 personer väljer varsin favorit bland 13 olika filmer. Vi söker antalet sätt det kan ske, då precis 9 av filmerna inte väljs av någon.

Lösning: Det sökta antalet = antalet sätt att dela upp 6 personer i 4 (13 - 9) icke-tomma mängder och sedan välja olika filmer (bland de 13) för de 4 delarna = $\frac{13!}{9!} \cdot S(6, 4) = 65 \cdot \frac{13!}{9!}$. $S(6, 4) = 65$ enligt "Stirlings triangel"

		1			
	1	3	1		
1	7	6	10	1	
		25	65		

till höger. **Svar: Valen kan ske på $65 \cdot \frac{13!}{9!}$ (= 1 115 400) sätt.**
(Alternativt kan de 4 filmerna väljas på $\binom{13}{4}$ sätt och för varje sådant val finns $4! \cdot S(6, 4)$ surjektioner av personer på de 4 favoritfilmerna.)

7) $\pi_1, \pi_2 \in S_8$ ges av tabellen till höger. Vi skall (a, 1p) ge π_1 och π_2 i cykelnotation, (b, 1p) finna $\pi_1\pi_2$ och dess ordning och (c, 2p) finna $\sigma \in S_8$ med $\sigma\pi_1 = \pi_2\sigma$, eller visa att inget sådant σ finns.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_1(i)$	6	8	3	2	7	1	5	4
$\pi_2(i)$	5	2	1	8	3	7	6	4

Lösning: a. $\pi_1(1) = 6, \pi_1(6) = 1, \pi_1(2) = 8, \pi_1(8) = 4, \dots$ ger $\pi_1 = (1\ 6)(2\ 8\ 4)(3)(5\ 7) = (1\ 6)(2\ 8\ 4)(5\ 7)$ och p.s.s. $\pi_2(1) = (1\ 5\ 3)(2)(4\ 8)(6\ 7) = (1\ 5\ 3)(4\ 8)(6\ 7)$.
b. $(\pi_1\pi_2)(1) = \pi_1(\pi_2(1)) = \pi_1(5) = 7, (\pi_1\pi_2)(7) = \pi_1(\pi_2(7)) = \pi_1(6) = 1, \dots$ ger som ovan $\pi_1\pi_2 = (1\ 7)(2\ 8)(3\ 6\ 5)$, med ordningen $o(\pi_1\pi_2) = \text{mgm}(2, 2, 3) = 6$.
c. $\sigma\pi_1 = \pi_2\sigma \Leftrightarrow \sigma\pi_1\sigma^{-1} = \pi_2$ och $\sigma\pi_1\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(6))(\sigma(3))(\sigma(2)\sigma(8)\sigma(4))(\sigma(5)\sigma(7))$ (konjugering). σ måste ta π_1 :s olika i -cykler till π_2 :s olika i -cykler, $i = 1, 2, 3$, och elementen i π_1 :s cykler till elementen i π_2 :s cykler i rätt (cyklisk) ordning. Man kan ta $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 3, \dots$, så $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 6\ 8)$.

Svar a: $\pi_1 = (1\ 6)(2\ 8\ 4)(5\ 7)$, $\pi_2 = (1\ 5\ 3)(4\ 8)(6\ 7)$, **b:** $\pi_1\pi_2 = (1\ 7)(2\ 8)(3\ 6\ 5)$, **c:** $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 6\ 8)$ (t.ex., det finns 24 olika möjliga σ).

8) (4p) Vi skall visa att det inte finns $x \in \mathbb{Z}$ med $x^{20} + 25 \equiv_n 0$, om $n \in \mathbb{Z}_+$ och $7 \mid n$.

Lösning: Antag att $a^{20} + 25 \equiv_n 0, a \in \mathbb{Z}$. Om det leder till motsägelse följer påståendet. Då gäller $a^{20} + 25 \equiv_7 0$ ($n \mid (a^{20} + 25) \Rightarrow 7 \mid (a^{20} + 25)$, då $7 \mid n$), men $a^7 \equiv_7 a$ (Fermats lilla sats, 7 är ju ett primtal) så $a^{20} \equiv_7 a^2 \cdot a^6 = a \cdot a^7 \equiv_7 a^2$ och därmed $a^{20} + 25 \equiv_7 a^2 + 4$. Men för alla $x \in \mathbb{Z}$ är $x^2 \equiv_7 0, 1, 2$ eller 4 (alla kvadrater i $\mathbb{Z}_7$), så $x^2 + 4 \equiv_7 4, 5, 6$ eller 1. Antagandet för a ledde till $a^2 + 4 \equiv_7 0$, motsägelse. **Saken är klar.**

9) a_n och b_n är antalen olika fullständiga matchningar av K_{2n} som har ingen respektive precis en kant gemensam med stigen $v_1 v_2 \dots v_{2n}$. Vi ska (a, 2p) visa att $a_n = (2n-2)a_{n-1} + b_{n-1}$ för $n \in \mathbb{Z}_+$, (b, 2p) finna ett liknande uttryck för b_n och (c, 1p) finna a_5 .

Lösning: En fullständig matchning M av K_{2n} (med hörn $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$) kan fås genom att för ett $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ i en fullständig matchning M' av $K_{2(n-1)}$ (med hörn $u_1, u_2, \dots, u_{2(n-1)}$) "döpa om" u_i till v_i för $i = 1, 2, \dots, k-1$ och till v_{i+1} för $i = k, \dots, 2n-2$ och lägga till kanten $\{v_k, v_{2n}\}$. Olika k och olika M' ger olika M och M är disjunkt med $v_1 v_2 \dots v_{2n}$ omm antingen $k = 1, 2, \dots, 2n-2$ ($2n-2$ st) och M' är disjunkt med $u_1 \dots u_{2(n-1)}$ (a_{n-1} st) eller M' har precis en kant gemensam med $u_1 \dots u_{2(n-1)}$ (b_{n-1} st) och k har det värde som "separerar" den kanten (precis ett sådant k finns och det är $\leq 2(n-1)$).

Dessa fall är disjunkta, så (additionsprincipen) $a_n = (2n-2)a_{n-1} + b_{n-1}$. **a-Saken är klar.**

b. Om M och $v_1 v_2 \dots v_{2n}$ har kanten $\{v_k, v_{k+1}\}$ gemensam (så $k = 1, 2, \dots, 2n-1$) kan den fås genom att i ett M' som ovan döpa om u_i till v_i för $i = 1, 2, \dots, k-1$ och till v_{i+2} för $i = k, \dots, 2n-2$ och lägga till $\{v_k, v_{k+1}\}$. Olika k och olika M' ger olika M och M och $v_1 v_2 \dots v_{2n}$ har bara kanten $v_k v_{k+1}$ gemensam omm antingen $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ ($2n-1$ st) och M' är disjunkt med $u_1 \dots u_{2(n-1)}$ (a_{n-1} st) eller M' har precis en kant gemensam med $u_1 \dots u_{2(n-1)}$ (b_{n-1} st) och k har det värde som "separerar" den kanten (precis ett sådant k finns). Dessa fall är disjunkta, så (additionsprincipen) $b_n = (2n-1)a_{n-1} + b_{n-1} (= a_{n-1} + a_n)$.

c. Vi utgår från $a_1 = 0, b_1 = 1$ (eller $a_0 = 1, b_0 = 0$) och finner

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= 2 \cdot 0 + 1 = 1, & a_3 &= 4 \cdot 1 + 1 = 5, & a_4 &= 6 \cdot 5 + 6 = 36, & a_5 &= 8 \cdot 36 + 41 = 329 \\ b_1 &= 1, & b_2 &= 3 \cdot 0 + 1 = 1, & b_3 &= 5 \cdot 1 + 1 = 6, & b_4 &= 7 \cdot 5 + 6 = 41, & b_5 &= 9 \cdot 36 + 41 = 365 \end{aligned}$$

Svar a: Visat ovan, b: $b_n = (2n-1)a_{n-1} + b_{n-1}$, c: $a_5 = 329$.

10) 12 pärlor, varav 4 röda, träs upp på en ögla. Vi söker antalet väsentligt olika sådana armband då (a, 3p) övriga pärlor är svarta och (b, 2p) då de övriga är svarta eller vita.

Lösning: Vi använder Burnsidess lemma och låter de icke-röda pärlorna ha k möjliga färger. Om armbandet placeras med pärlorna i hörnen av en reguljär 12-hörning kan elementen i gruppen G av permutationer av pärlorna då armbandet vändes och vrides beskrivas som dels rotationer $k \cdot \frac{\pi}{6}$, $k = 0, 1, \dots, 11$, (nedan givna av k -värdet) kring en axel genom 12-hörningens mittpunkt och vinkelrät mot dess plan och dels 6 π -rotationer vardera kring axlar genom två motstående hörn respektive två motstående sidor i 12-hörningen ("vänd hh " och "vänd ss "). $|X_g|$, antalet färgningar som inte ändras av g , är (eftersom pärlor i samma bana under g 's verkan måste ha samma färg): (antalet sätt att välja röda banor) $\cdot k^{(\text{antalet återstående banor})}$.

g	antal sådana g	pärlornas banor	$ X_g $
id ($k = 0$)	1	$[1^{12}]$	$\binom{12}{4} \cdot k^8 = 495k^8$ 4 röda banor
$k = 1, 5, 7, 11$	4	$[12]$	0 ingen röd bana
$k = 2, 10$	2	$[6^2]$	0 ingen röd bana
$k = 3, 9$	2	$[4^3]$	$3 \cdot k^2$ en röd bana
$k = 4, 8$	2	$[3^4]$	0 ingen röd bana
$k = 6$	1	$[2^6]$	$\binom{6}{2} \cdot k^4 = 15k^4$ två röda banor
vänd hh	6	$[1^2 2^5]$	$5 \cdot k^4 + \binom{5}{2} \cdot k^5 = 5k^4 + 10k^5$ tre eller två röda banor
vänd ss	6	$[2^6]$	$\binom{6}{2} \cdot k^4 = 15k^4$ två röda banor

Så antalet väsentligt olika armband = antalet banor under G 's verkan = $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| =$
 $= \frac{1}{24} (1 \cdot 495k^8 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot k^2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 15k^4 + 6 \cdot (5k^4 + 10k^5) + 6 \cdot 15k^4) =$
 $= \frac{1}{24} (495k^8 + 60k^5 + 135k^4 + 6k^2).$

$k = 1$ ger 29 och $k = 2$ ger 5451, a) och b) i uppgiften.

Svar a: Antalet olika sådana armband är 29, b: Antalet är 5451.