

Tentamen i kursen
SF1662 DISKRET MATEMATIK, för CL1, E2, E3
onsdagen den 16 augusti 2017, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer vt 2017.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget (med "B" i rutan för $\times/-$) vilka ks:ar du har klarat.

OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

1) (3p) Är $127 \in \mathbb{Z}_{906}$ inverterbart?

Motivera att det inte är det, eller finn en invers (given som en av $0, 1, 2, \dots, 905$.)

2) (3p) Låt talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ uppfylla

$$a_0 = 0, a_1 = -3 \text{ och } a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3^n \text{ för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Visa att $a_n = 2^{n+1} - 3^n - 4^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

3) (3p) På hur många sätt kan en kortlek ordnas, så att minst två hjärterkort ligger intill varandra? (Kortleken består av 52 olika kort, varav 13 är hjärterkort.)

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt gruppen G vara $(U(\mathbb{Z}_{42}), \cdot)$ (de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{42}$, med multiplikation som operation).

a) (1p) Finn alla G :s element.

b) (1p) Vad betyder det (dvs hur definieras) att $\phi: G \rightarrow G$ är en isomorfi?

c) (1p) Avgör om $\phi: G \rightarrow G$, given av $\phi(g) = g^7$ för $g \in G$, är en isomorfi.

5) (3p) Den sammanhängande grafen $G = (V, E)$ är ritad utan korsande kanter på en sfär. De ytor (fasetter) som G delar in sfären i har alla precis 3 kanter, utom en med 7, en med 6, tre med 5 och sju med 4 kanter.

Antalet hörn (noder) i G (dvs $|V|$) är lika med antalet ytor. Finn detta antal.

DEL II

6) (4p) Var och en av 6 personer får välja sin favorit bland 13 olika filmer. På hur många sätt kan det ske, så att precis 9 av filmerna inte väljs av någon? (Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorialer och de fyra enkla räknesätten.)

7) Permutationerna $\pi_1, \pi_2 \in S_8$ ges av tabellen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_1(i)$	6	8	3	2	7	1	5	4
$\pi_2(i)$	5	2	1	8	3	7	6	4

a) (1p) Uttryck π_1 och π_2 i cykelnotation.
b) (1p) Finn produkten (sammansättningen) $\pi_1\pi_2$ (i cykelnotation) och dess ordning.
c) (2p) Finn en permutation $\sigma \in S_8$ som uppfyller $\sigma\pi_1 = \pi_2\sigma$, eller visa att inget sådant σ finns.

8) (4p) Visa att om $n \in \mathbb{Z}_+$ och $7 \mid n$, finns inget $x \in \mathbb{Z}$ sådant att

$$x^{20} + 25 \equiv 0 \pmod{n}.$$

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Låt $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ vara hörnen (noderna) i den fullständiga grafen K_{2n} , $n \in \mathbb{N}$, a_n antalet olika fullständiga matchningar i K_{2n} som är disjunkta med hamiltonstigen $v_1v_2 \dots v_{2n}$ (dvs fullständiga matchningar som inte innehåller $\{v_k, v_{k+1}\}$ för något $k = 1, 2, \dots, 2n-1$) och b_n antalet sådana matchningar som har precis en kant gemensam med samma hamiltonstig (så t.ex. $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ (bara $\{13, 24\}$, där ij står för $\{v_i, v_j\}$) och $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ (bara $\{14, 23\}$)).

a) (2p) Visa att $a_n = (2n-2)a_{n-1} + b_{n-1}$ för $n \in \mathbb{Z}_+$.

b) (2p) Uttryck (med motivering) på liknande sätt b_n med hjälp av a_{n-1} och b_{n-1} .

c) (1p) Vad är värdet för a_5 ? (Ges som ett heltal.)

10) Ett trendigt armband består av 12 pärlor, varav precis 4 röda, uppträdda på en ögla av snöre. Hur många väsentligt olika sådana armband finns det,

a) (3p) då övriga 8 pärlor alla är svarta?

b) (2p) då var och en av de övriga är antingen svart eller vit?

Pärlor av samma färg och pärlor som vänds ser likadana ut. Armbanden kan vändas och vridas.

Svaren ges som heltal.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.