Matematik, KTH
B.Ek

Lösningar tentan SF1662 DISKRET MATEMATIK, 17 augusti 2016

Tryckfel kan förekomma.

1) (3p) Vi söker alla $x, y \in \mathbb{Z}$ med $1000x + 846y = 210$.

Lösning: Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 1000 = 846 \cdot 1 + 154, \\ 846 = 154 \cdot 5 + 76, \\ 154 = 76 \cdot 2 + 2, \\ 76 = 2 \cdot 38 + 0 \end{cases} \quad \text{så } \mathrm{sgd}(1000, 846) = 2 \text{ och } \begin{cases} 2 &= 154 - 2(846 - 5 \cdot 154) = \\ &= -2 \cdot 846 + 11(1000 - 1 \cdot 846) = \\ &= 11 \cdot 1000 - 13 \cdot 846. \end{cases}$$

Multiplikation med 105 ger att $(x_0, y_0) = (11 \cdot 105, -13 \cdot 105) = (1155, -1365)$ är en lösning. Så: (x, y) en lösning $\Leftrightarrow 1000x + 846y = 1000x_0 + 846y_0 \Leftrightarrow 1000(x - x_0) + 846(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 500(x - x_0) = -423(y - y_0) \Leftrightarrow x = x_0 + 423k,\ y = y_0 - 500k, k \in \mathbb{Z}$ (ty $\mathrm{sgd}(500, 423) = 1$). Således (med $n = k + 3$) $x = -114 + 423n$, $y = 135 - 500n$.

Svar: Alla heltalslösningar ges av $\begin{cases} \boldsymbol{x = -114 + 423n,} \\ \boldsymbol{y = 135 - 500n,} \end{cases} \quad \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}.}$

(Alt. Eulers metod: $1000x + 846y = 210,\ x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = -x + \frac{210 - 154x}{846} = -x + z,\ x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 846z + 154x = 210,\ x, z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -5z + 1 + \frac{56 - 76z}{154} = -5z + 1 + u,\ x, z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 154u + 76z = 56,\ z, u \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -2u + \frac{56 - 2u}{76} = -2u + v,\ z, u \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 76v + 2u = 56,\ u, v \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow u = 28 - 38v,\ v \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = -56 + 77v,\ v \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 309 - 423v,\ y = -365 + 500v,\ v \in \mathbb{Z}.\ (v = -n + 1).$

(Där $\Leftrightarrow$ tolkas med de angivna sambanden mellan x, y, z, u, v.))

---

2) (3p) X är en mängd och $f : X \to X$ uppfyller $f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y)$ för alla $x, y \in X$. Vi ska avgöra om f kan/måste vara injektiv, surjektiv och/eller bijektiv.

Lösning: Exemplet $f = id_X$ visar att sådana f (för varje X) kan ha alla tre egenskaperna. Exemplet f konstant visar (om $|X| \geq 2$) att sådana f inte behöver ha någon av egenskaperna ($f(x) = a \in X$ för alla $x \in X$ ger att $f(x) = f(y)$ för alla $x, y \in X$, så villkoret uppfyllt, men om $b \in X$, $a \neq b$ är $f(a) = f(b) (= a)$, $a \neq b$, så f inte injektiv (så inte bijektiv), $f(x) = a \neq b$, alla $x \in X$, så f inte surjektiv).

Svar: $\boldsymbol{f}$ kan ha alla egenskaperna, men behöver inte ha någon av dem.

---

3) (3p) Vi söker antalet sätt att placera 6 (identiska) vita, 12 (särskiljbara) färgade och 15 (identiska) svarta kulor i 9 (särskiljbara) lådor, med högst en vit och minst en svart kula i varje låda.

Lösning: De vita kulorna kan fördelas på $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!}$ sätt (antalet sätt utse lådor med vit kula). De färgade kan fördelas på 9^{12} sätt (antalet funktioner 12-mängd $\to$ 9-mängd). De svarta på $\binom{6+8}{6} = \frac{14!}{6! \cdot 8!}$ sätt (en svart kula i varje låda, övriga 6 oordnat med upprepning i 8 lådor). Enligt multiplikationsprincipen ges svaret av produkten av dessa antal.

Svar: Antalet sådana fördelningar är $\boldsymbol{\frac{9^{13} \cdot 14!}{3! \cdot 6!^2}}$ (= 71 243 415 436 405 212).

---

4) (3p) G är gruppen $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$ och vi skall (a, 1p) ange alla element i G, (b, 1p) avgöra om G är cyklisk och (c, 1p) finna alla lösningar i $\mathbb{Z}_{18}$ till $x^{17} = 7$.

Lösning: a. G består av alla $x \in \mathbb{Z}_{18}$ med $\mathrm{sgd}(x, 18) = 1$, så $G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
b. G är cyklisk precis om det finns ett $g \in G$ med samma ordning som gruppen, $o(g) = |G|$. $|G| = 6$, så möjliga ordningar är 1, 2, 3, 6 (ty $o(g) \mid |G|$). I $\mathbb{Z}_{18}$ är $5 \neq 1$, $5^2 = 7 \neq 1$, $5^3 = 5 \cdot 7 = 17 \neq 1$, så $o(5) \neq 1, 2, 3$, dvs $o(5) = 6$ och 5 genererar G, som alltså är cyklisk.
c. Varje $x \in \mathbb{Z}_{18}$ som uppfyller $x^{17} = 7$ är inverterbart, $x \in G$ (ty $x^{17} = 7 \Rightarrow x \cdot (x^{16} \cdot 7^{-1}) = 1$) och eftersom varje element $g \in G$ (enligt Lagranges sats) uppfyller $g^{|G|} = g^6 = 1$ (och därmed $g^{18} = 1$), blir ekvationen om $x \in G$: $x^{17} = x^{18}x^{-1} = x^{-1} = 7$, dvs $x = 7^{-1} = 13$.

Svar a: $\boldsymbol{G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}}$, b: $\boldsymbol{G}$ är cyklisk, c: enda lösningen är $\boldsymbol{x = 13}$.

---

5) (3p) $G = (V, E)$ har kromatiska talet $\chi(G) = n$ och om en ny kant läggs till G, ökar det kromatiska talet. Vi ska visa att antalet hörnfärgningar av G med n färger är $n!$.

Lösning: I en minimal färgning av G har varje par av hörn som inte är grannar samma färg (annars duger samma färgning med en kant till). Det finns alltså n st mängder av hörn som måste ha samma färg, olik de andras, i minimala färgningar. En minimal färgning innebär precis en fördelning av de n färgerna på dessa, så det finns $n!$ sådana. **Saken är klar.**

---

6) $\pi \in S_{11}$ ges av att $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 11$, $\pi(4) = 9$, $\pi(5) = 10$, $\pi(6) = 8$, $\pi(7) = 3$, $\pi(8) = 6$, $\pi(9) = 2$, $\pi(10) = 5$, $\pi(11) = 7$. Vi skall (a, 1p) skriva π i cykelform och finna π:s ordning, $o(\pi)$, (b, 1p) avgöra om π är jämn eller udda och (c, 2p) finna antalet olika $\sigma \in S_{11}$ som uppfyller $\sigma^{65} = id$.

Lösning: a. $\pi(1) = 4$, $\pi(4) = 9$, $\pi(9) = 2$, $\pi(2) = 1, \ldots$ så $\pi = (1\,4\,9\,2)(3\,11\,7)(5\,10)(6\,8)$.
Dess ordning är mgm av cykellängderna, $o(\pi) = \mathrm{mgm}(4, 3, 2, 2) = 12$.
b. Eftersom π innehåller 3 cykler av jämn längd (dvs udda cykler), är π udda.
c. σ uppfyller $\sigma^{65} = id$ omm alla dess cykellängder är delare till 65, så det handlar om alla σ med cykelstrukturer $[1^{11}]$, $[1^6 5]$, $[1 5^2]$ Antalen sådana är 1, $\binom{11}{5} \cdot 4! = \frac{11! \cdot 4!}{5! \cdot 6!} = \frac{11!}{5 \cdot 6!}$ (vilka 5 i 5-cykeln?, vilken 5-cykel av dem (godtycklig först, övriga ordnas)?) respektive $\binom{11}{5} \cdot \binom{6}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4!^2 = \frac{11! \cdot 6! \cdot 4!^2}{5! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 2} = \frac{11! \cdot 12}{5 \cdot 5!}$ (vilka 5 i första 5-cykeln, vilka i andra, vilken cykel är först?, vilka två 5-cykler av dem?).

Svar a: $\boldsymbol{\pi = (1\,4\,9\,2)(3\,11\,7)(5\,10)(6\,8)}$ och $\boldsymbol{o(\pi) = 12}$,
b: $\boldsymbol{\pi}$ är en udda permutation,
c: Antalet sådana $\boldsymbol{\sigma}$ är $\boldsymbol{1 + \frac{11!}{5 \cdot 6!} + \frac{12!}{5 \cdot 5!}}$ (= 809 425).

---

7) (4p) Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N}$. Vi skall för alla $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ visa att $F_{n+k} = F_n F_{k-1} + F_{n+1} F_k$.

Lösning: Vi visar för $k \in \mathbb{Z}_+$ att $P_k :\ F_{n+k} = F_n F_{k-1} + F_{n+1} F_k$, alla $n \in \mathbb{N}$, är sant.
Bas: P_1 är sant, ty $\mathrm{HL}_1 = F_n F_0 + F_{n+1} F_1 = F_n \cdot 0 + F_{n+1} \cdot 1 = F_{n+1} = \mathrm{VL}_1$, alla $n \in \mathbb{N}$.
Steg: Antag för ett godtyckligt $k \in \mathbb{Z}_+$ att P_k är sann.
Då är $\mathrm{VL}_{k+1} = F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} \overset{P_k(\text{med } n+1)}{=} F_{n+1} F_{k-1} + F_{n+2} F_k = F_{n+1} F_{k-1} + {}$
$+ (F_{n+1} + F_n) F_k = F_n F_k + F_{n+1}(F_k + F_{k-1}) = F_n F_k + F_{n+1} F_{k+1} = \mathrm{HL}_{k+1}$, alla $n \in \mathbb{N}$.
Så $P_k \Rightarrow P_{k+1}$, alla $k \in \mathbb{Z}_+$, och P_1 sanna. Induktionsprincipen ger P_k sant, alla $k \in \mathbb{Z}_+$.
Saken är klar.
(Man kan alternativt visa P_1, P_2 och $(P_k,\ P_{k+1}) \Rightarrow P_{k+2}$, alla $k \in \mathbb{Z}_+$, eller använda induktion över n istället.)

---

8) (4p) Vi söker antalet bijektioner $f : A \cup B \to X \cup Y \cup Z$ med $a \in A \Rightarrow f(a) \notin X$, $b \in B \Rightarrow f(b) \notin Z$ då $|A \cup B| = |X \cup Y \cup Z| = 27$, $|A| = 15$, $|B| = 16$, $|X| = |Y| = |Z| = 9$.

Lösning: $27 = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 16 - |A \cap B|$ ger att $|A \cap B| = 4$.
$|X \cup Y \cup Z| = 27 = 9 + 9 + 9 = |X| + |Y| + |Z|$ ger att X, Y och Z är disjunkta.
f på $A \cap B$ är en injektion $\to Y$ (varken X eller Z). Den kan väljas på $(9)_4 = \frac{9!}{5!}$ sätt.
f måste ta alla X-värden på resten av B. Kan väljas på $(12)_9 = \frac{12!}{3!}$ sätt (injektion $X \to (B \setminus A)$)
och pss alla Z-värden på resten av A, $(11)_9 = \frac{11!}{2!}$ sätt.
I resterande 2 punkter i A, 3 i B, tar f godtyckliga, olika värden i $Y \setminus f[A \cap B]$, $5!$ möjligheter.
Multiplikationsprincipen ger totalt $\frac{9!}{5!} \cdot \frac{12!}{3!} \cdot \frac{11!}{2!} \cdot 5! = 9! \cdot 11!^2$ olika sådana f.

Svar: Det finns $\boldsymbol{9! \cdot 11!^2}$ (= 578 195 182 662 451 200 000) sådana bijektioner.

---

9) Vi söker alla $z \in \mathbb{Z}[i]$ med $(9+2i)z \equiv 3-i \pmod{7+6i}$.

Lösning: Vår metod att lösa motsvarande problem i $\mathbb{Z}$ fungerar i alla euklidiska ringar, även $\mathbb{Z}[i]$.
$(9+2i)z \equiv 3-i \pmod{7+6i} \Leftrightarrow (9+2i)z + (7+6i)w = 3-i$ för något $w \in \mathbb{Z}[i]$.
Euklides algoritm:

$\begin{cases} 9+2i = (7+6i)\cdot 1 + (2-4i), \\ 7+6i = (2-4i)\cdot 2i + (-1+2i), \\ 2-4i = (-1+2i)\cdot(-2)+0 \end{cases}$ vi tar $\mathrm{sgd}(9+2i, 7+6i) =$ $= -1+2i$ och får $\begin{cases} -1+2i = (7+6i) - 2i\cdot(2-4i) = \\ = (7+6i) - 2i((9+2i)-(7+6i)) = \\ = -2i\cdot(9+2i) + (1+2i)(7+6i) \end{cases}$

(I algoritmens andra steg: $\frac{7+6i}{2-4i} = -\frac{1}{2} + 2i$. Närmast i $\mathbb{Z}[i]$ är $2i$ (eller, också möjlig, $-1+2i$).)
Division med $\mathrm{sgd}(9+2i, 7+6i) = -1+2i$ ger $1 = -2i(-1-4i) + (1+2i)(1-4i)$ medan zw-ekvationen blir ekvivalent med $(-1-4i)z + (1-4i)w = \frac{3-i}{-1+2i} = (-1-i)$.
Multiplikation med $(-1-i)$ ger $(-1-4i)(-2+2i)+(1-4i)(1-3i) = -1-i$, så $\begin{cases} z_0 = -2+2i \\ w_0 = 1-3i \end{cases}$ är en lösning.
z, w är då en lösning omm $(-1-4i)(z-z_0)+(1-4i)(w-w_0) = 0$, dvs (eftersom $\mathrm{sgd}(-1-4i, 1-4i) = 1$, måste $(1-4i) \mid (z-z_0)$, så $z - z_0 = (1-4i)k$, $k \in \mathbb{Z}[i]$, och alla $k \in \mathbb{Z}[i]$ ger lösningar) $z - z_0 = (1-4i)k$ (och $w - w_0 = (1+4i)k$) för något $k \in \mathbb{Z}[i]$.

Svar: Alla sådana z ges av $z = -2+2i+(1-4i)k$, där $k \in \mathbb{Z}[i]$ är godtyckligt.
(Alternativt kan man använda Eulers metod eller regler för moduloräkning.)

---

10) En polyeder är **enkel** om grafen av dess hörn, kanter och sidoytor är isomorf med en plan graf. **Defekten** κ_j i hörn j i en polyeder är vinkeln som "fattas" om man plattar ut hörnet. Vi ska visa **Descartes formel**, att $\sum_j \kappa_j = 4\pi$ dels (a, 1p) då polyedern är en tetraeder, dels (b, 4p) för en godtycklig enkel polyeder.

Lösning: Låt α_{ij} vara vinkeln i sida i vid hörn j (0 om hörn j inte ligger vid sida i). Då är $\kappa_j = 2\pi - \sum_i \alpha_{ij}$ och $\sum_j \kappa_j = \sum_j 2\pi - \sum_j \sum_i \alpha_{ij} = 2\pi v - \sum_i \sum_j \alpha_{ij} = 2\pi v - \sum_i (n_i - 2)\pi =$ $= 2\pi(v-e+r) = 4\pi$, där v, e, r är antalen hörn, kanter och ytor, medan n_i är antalet kanter i sida i. (Vi har använt $\sum_i n_i = 2e$ och Eulers polyederformel.) **b-Saken är klar** (och a följer ur b).
