

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen

SF1662 DISKRET MATEMATIK, för CL1, SIMTEK2, E23,

onsdagen den 17 augusti 2016, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen vt16 med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.

OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

1) (3p) Finn alla heltal x, y som uppfyller

$$1000x + 846y = 210.$$

2) (3p) Låt X vara en mängd och funktionen $f : X \rightarrow X$ uppfylla att

$$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y), \text{ för alla } x, y \in X.$$

Vilka av egenskaperna injektivitet, surjektivitet och bijektivitet kan f ha och vilka av dem måste f ha?

3) (3p) På hur många sätt kan 6 (identiska) vita, 12 (särskiljbara) färgade och 15 (identiska) svarta kulor placeras i 9 (särskiljbara) lådor, om det skall vara högst en vit och minst en svart kula i varje låda? (Varje kula skall förstås ligga i exakt en låda.) (Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$, dvs de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{18}$, med operationen multiplikation.

a) (1p) Ange alla element i G .

b) (1p) Avgör om G är en cyklisk grupp.

c) (1p) Finn alla lösningar i $\mathbb{Z}_{18}$ till ekvationen $x^{17} = 7$.

5) (3p) Grafen $G = (V, E)$ har kromatiska talet $\chi(G) = n$ och är sådan att om en ny kant (dvs en kant mellan två hörn som inte är grannar i G) läggs till G , ökar det kromatiska talet.

Visa att antalet hörnfärgningar av G med n färger är $n!$ (dvs $P_G(n) = n!$).

Vänd!

DEL II

6) Permutationen $\pi \in S_{11}$ ges av att

$$\begin{aligned}\pi(1) &= 4, \pi(2) = 1, \pi(3) = 11, \pi(4) = 9, \pi(5) = 10, \pi(6) = 8, \\ \pi(7) &= 3, \pi(8) = 6, \pi(9) = 2, \pi(10) = 5, \pi(11) = 7.\end{aligned}$$

a) (1p) Uttryck π i cykelnotation och finn π 's ordning, $o(\pi)$.

b) (1p) Avgör om π är en jämn eller en udda permutation.

c) (2p) Hur många olika $\sigma \in S_{11}$ uppfyller $\sigma^{65} = id$ (identitetspermutationen)?
(Svaret i c) får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

7) (4p) Låt som vanligt Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ för } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ gäller att $F_{n+k} = F_n F_{k-1} + F_{n+1} F_k$.

8) (4p) Låt A , B , X , Y och Z vara mängder, med

$$|A \cup B| = |X \cup Y \cup Z| = 27, |A| = 15, |B| = 16, |X| = |Y| = |Z| = 9.$$

Hur många bijektioner $f: A \cup B \rightarrow X \cup Y \cup Z$ sådana att

$$a \in A \Rightarrow f(a) \notin X, b \in B \Rightarrow f(b) \notin Z$$

finns det?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9 (5p) Finn alla $z \in \mathbb{Z}[i]$ (de gaussiska heltalen) som uppfyller

$$(9 + 2i)z \equiv 3 - i \pmod{7 + 6i}.$$

(Dvs sådana att $(7 + 6i) \mid ((9 + 2i)z - (3 - i))$ i $\mathbb{Z}[i]$.)

10) Vi kallar en polyeder (en kropp med (ändligt många) plana begränsningsytor, i sin tur begränsade av polyederns kanter och hörn) **enkel** om grafen av dess hörn och kanter är isomorf med en plan graf vars ytor (fasetter) motsvarar polyederns begränsningsytor.

Låt **defekten** (krökningen) i hörn j i en polyeder, κ_j , vara vinkeln som "fattas" om man plattar ut hörnet, dvs $\kappa_j = 2\pi - (\text{summan av vinklarna vid det hörnet, för alla ytor som möts där})$.

Descartes formel säger att summan av alla hörnens defekter i en enkel polyeder är 4π ,

$$\sum_j \kappa_j = 4\pi.$$

a) (1p) Visa Descartes formel då polyedern är en tetraeder (dvs dess ytor är fyra trianglar (inte säkert liksidiga)).

b) (4p) Visa formeln i det allmänna fallet.

Utan bevis får användas att summan av vinklarna i en n -hörning är $(n - 2)\pi$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.