

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen

SF1662, DISKRET MATEMATIK för CL, SIMTEK, E, m.fl.

onsdagen den 19 augusti 2015, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.

OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

1) (3p) Finn den största gemensamma delaren $\text{sgd}(1794, 806)$ (i kursboken oftast kallad $\text{gcd}(1794, 806)$) och $a, b \in \mathbb{Z}$ med $\text{sgd}(1794, 806) = 1794a + 806b$.

2) (3p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ uppfyller

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 6, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n + 2^{n+2}, & \text{för } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ är $a_n = 2 \cdot 3^n - (1 + (-1)^n) \cdot 2^n$.

3) (3p) 12 flickor och 15 pojkar vill sitta, men det finns bara 17 stolar.

På hur många sätt kan stolarna fyllas så att alla flickor får sitta?

(Alla stolar och alla personer särskiljbara (men inte ståplatserna). En person på varje stol.)

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt $(U_{36}, \cdot)$ vara gruppen av inverterbara element i $(\mathbb{Z}_{36}, \cdot)$.

a) (1p) Ange alla element i U_{36} .

b) (2p) Finn ordningen, $o(5)$, för elementet 5 i U_{36} .

5) (3p) En sammanhängande graf $G = (V, E)$ är ritad på en sfär, utan korsande kanter. Hörnen (noderna) med valens (grad) 3 är precis 5 gånger så många som de med valens 5 och inga andra valenser förekommer. G har precis 10 hörn mer än dualgrafan $G^\perp$. Hur många kanter har G ?

Vänd!

DEL II

6) (4p) Finn ett naturligt tal k sådant att för alla heltal x, y som uppfyller $y \equiv x^{585} \pmod{667}$, gäller att $x \equiv y^k \pmod{667}$. [$667 = 23 \cdot 29$].

7) Permutationen $\pi \in S_9$ ges av

$$\pi(1)=3, \pi(2)=2, \pi(3)=4, \pi(4)=1, \pi(5)=8, \pi(6)=5, \pi(7)=9, \pi(8)=6, \pi(9)=7.$$

a) (1p) Skriv π i cykelnotation.

b) (2p) Vi ser att $\pi \in H = \{\tau \in S_9 \mid i \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \tau(i) \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Visa att H är en delgrupp till S_9 .

c) (1p) Finn $(S_9 : H)$, H :s index i S_9 (dvs antalet olika sidoklasser till H i S_9).

8) (4p) Låt $X = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$. Hur många **bijektioner** $f : X \rightarrow X$ uppfyller att det både finns (minst) ett udda $x \in X$ sådant att $f(x)$ är udda och (minst) ett $y \in X$ med $y \leq 4$ och $f(y) \geq 6$ ($x = y$ är möjligt)?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) Låt $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ vara (enkla, dvs inga multipla kanter eller öglor) grafer och definiera deras **L-produkt** $\mathbf{G}_1[\mathbf{G}_2]$ som grafen (V_L, E_L) med

$$V_L = V_1 \times V_2 \text{ och } \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E_L \Leftrightarrow \begin{cases} \{u_1, v_1\} \in E_1 \text{ eller} \\ \text{både } u_1 = v_1 \text{ och } \{u_2, v_2\} \in E_2. \end{cases}$$

Visa att $\overline{G_1[G_2]} = \overline{G_1}[\overline{G_2}]$.

$\overline{G}$ står här för **komplementgrafen** till grafen $G = (V, E)$, med samma hörn som G och "de kanter som G saknar" (dvs $\overline{G} = (V, \overline{E})$ med $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$).

10) Definiera en relation $\mathcal{R}$ på S_7 (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \dots, 7\}$) enligt:

för alla $\sigma_1, \sigma_2 \in S_7$: $\sigma_1 \mathcal{R} \sigma_2 \Leftrightarrow$ det finns ett $\pi \in S_3$ sådant att $\pi\sigma_1 = \sigma_2\pi$.

(vi identifierar S_3 med delgruppen till S_7 av π som uppfyller $\pi(i) = i$ för $i = 4, 5, 6, 7$.)

a) (2p) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på S_7

(det skall tydligt framgå av lösningen vad som krävs för att $\mathcal{R}$ skall vara en ekvivalensrelation).

b) (3p) I hur många ekvivalensklasser delar $\mathcal{R}$ in S_7 ?

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.