Matematik, KTH
B.Ek

Lösningar tentan SF1662 DISKRET MATEMATIK, CLGYM1, TSVDK2, 27 maj 2014

Tryckfel kan förekomma.

1) (3p) Vi söker alla heltal x, y så att $63x + 48y = 27$.

Lösning: Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 63 = 1 \cdot 48 + 15, \\ 48 = 3 \cdot 15 + 3, \\ 15 = 5 \cdot 3 \end{cases} \quad \text{så } \operatorname{sgd}(63, 48) = 3 \text{ och } \begin{cases} 3 &= 48 - 3 \cdot 15 = 48 - 3(63 - 48) = \\ &= -3 \cdot 63 + 4 \cdot 48 \end{cases}$$

Division med $\operatorname{sgd}(63, 48) = 3$ ger $21 \cdot (-3) + 16 \cdot 4 = 1$ medan den givna ekvationen är ekvivalent med $21x + 16y = 9$.
Multiplikation med 9 ger $21 \cdot (-27) + 16 \cdot 36 = 9$, så $\begin{cases} x_0 = -27 \\ y_0 = 36 \end{cases}$ är en lösning.
x, y är då en lösning omm $21(x-x_0)+16(y-y_0) = 0$, dvs (eftersom $\operatorname{sgd}(21, 16) = 1$, måste $16 \mid (x - x_0)$, så $x - x_0 = 16k$, $k \in \mathbb{Z}$, och alla $k \in \mathbb{Z}$ ger lösningar) $x - x_0 = 16k$, $y - y_0 = -21k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Med $k = n + 2$ fås lite enklare form:
Svar: Alla lösningar ges av $\begin{cases} x = 5 + 16n \\ y = -6 - 21n \end{cases}$ **, där** $n \in \mathbb{Z}$.

(Alternativt, med Eulers metod: $63x + 48y = 27$ ger $y = -x + \frac{27-15x}{48} = -x + z$, där $27 - 15x = 48z$, så $x = 1 - 3z + \frac{12-3z}{15} = 1 - 3z + u$, där $12 - 3z = 15u$, så $z = 4 - 5u$, $u \in \mathbb{Z}$ godtyckligt.
Det ger $x = 1 - 3(4 - 5u) + u = -11 + 16u$ och $y = -(-11 + 16u) + (4 - 5u) = 15 - 21u$ (så $u = n + 1$).)

---

2) Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N}$.
Vi skall för alla $n \in \mathbb{N}$ visa att (a, 2p) $\operatorname{sgd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ och (b, 1p) $\operatorname{sgd}(F_n, F_{n+2}) = 1$.

Lösning: a. Med induktion visar vi påståendet $P_n : \operatorname{sgd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.
Bas: P_0 är sant, ty $\operatorname{sgd}(F_0, F_1) = \operatorname{sgd}(0, 1) = 1$.
Steg: Antag P_k för ett godtyckligt $k \in \mathbb{N}$, dvs $\operatorname{sgd}(F_k, F_{k+1}) = 1$.
Eftersom för alla $r, s \in \mathbb{Z}$ gäller att $\operatorname{sgd}(r, s+r) = \operatorname{sgd}(r, s)$ ($r, s+r$ och r, s har samma gemensamma delare), fås $\operatorname{sgd}(F_{k+1}, F_{k+2}) = \operatorname{sgd}(F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) = \operatorname{sgd}(F_{k+1}, F_k) = \operatorname{sgd}(F_k, F_{k+1}) \overset{\text{IA}}{=} 1$.
Så om P_k är sant är P_{k+1} sant och **enligt induktionsprincipen är a)-saken klar.**
b. $\operatorname{sgd}(F_n, F_{n+2}) = \operatorname{sgd}(F_n, F_{n+1} + F_n) = \operatorname{sgd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ (enligt a)). **b)-saken klar.**

---

3) (3p) Vi söker antalet sätt att ta fyra kort ur en vanlig kortlek (oordnat) så att de har olika färg och olika valör och det finns med en dam och en kung.

Lösning: Damens färg kan väljas på 4 sätt. Sedan kan kungens färg väljas på 3 sätt (inte samma som damens). Valörer för de återstående färgerna kan väljas på 11 respektive 10 sätt (inte samma som någon redan tagen valör). Multiplikationsprincipen ger det sökta antalet: $4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$. (Man kan också använda inklusion/exklusion.)

Svar: Korten kan väljas på 1320 sätt.

---

4) $\pi \in S_7$ ges av $\pi = (1\,3)(2\,7\,6)(4\,5)$ och H är den minsta delgruppen till S_7 som innehåller π. Vi söker (a, 1p) alla element i H, (b, 1p) index $(S_7 : H)$ och (c, 1p) alla element i σH, där $\sigma = (1\,2\,3)$.

Lösning: a. H är delgruppen som genereras av π, dvs den innehåller alla π^n, $n \in \mathbb{Z}$.
Man finner $H = \{id, (1\,3)(2\,7\,6)(4\,5), (2\,6\,7), (1\,3)(4\,5), (2\,7\,6), (1\,3)(2\,6\,7)(4\,5)\}$ ($o(\pi) = 6$).
b. $(S_7 : H) = \frac{|S_7|}{|H|} = \frac{7!}{6} = 840$.
c. $\sigma H = \{\sigma\tau \mid \tau \in H\}$. Multiplikation av alla H:s element med σ ger
$\sigma H = \{(1\,2\,3), (2\,7\,6\,3)(4\,5), (1\,2\,6\,7\,3), (2\,3)(4\,5), (1\,2\,7\,6\,3), (2\,6\,7\,3)(4\,5)\}$.

Svar a: $\boldsymbol{H = \{id, (1\,3)(2\,7\,6)(4\,5), (2\,6\,7), (1\,3)(4\,5), (2\,7\,6), (1\,3)(2\,6\,7)(4\,5)\}}$,
b: $\boldsymbol{H}$**:s index i** $\boldsymbol{S_7}$ **är 840,**
c: $\boldsymbol{\sigma H = \{(1\,2\,3), (2\,7\,6\,3)(4\,5), (1\,2\,6\,7\,3), (2\,3)(4\,5), (1\,2\,7\,6\,3), (2\,6\,7\,3)(4\,5)\}}$.

---

5) (3p) Grafen $G = (V, E)$ är sammanhängande, har v hörn och är ritad utan korsande kanter på ytan av en sfär. Alla ytor sfären delas in i har precis 3 kanter.
Vi söker e, antalet kanter i G, och r, antalet ytor sfären delas in i.

Lösning: Summan av antalen kanter vid ytorna är $2e$ (varje kant räknas vid två ytor (eller dubbelt vid en)), så $3r = 2e$. Eftersom grafen är plan och sammanhängande är (Euler) $v - e + r = 2$. Sambanden ger tillsammans att $e = 3v - 6$ och $r = 2v - 4$. (Kontrollera med tetra-, okta-, ikosaeder.)

Svar: Antalet kanter $e = 3v - 6$ och antalet ytor $r = 2v - 4$.

---

6) (4p) Vi söker (minsta icke-negativa) resten då $27^{5^{2014}}$ divideras med 17.

Lösning: Enligt Fermats lilla sats är $27^{16} \equiv_{17} 1$, ty 17 är ett primtal och $17 \nmid 27$.
Eftersom $5^2 = 25 \equiv_{16} 9$ är $5^4 \equiv_{16} 9^2 = 81 \equiv_{16} 1$ och $5^{2014} = (5^4)^{503} \cdot 5^2 \equiv_{16} 25 \equiv_{16} 9$, så $5^{2014} = 16k + 9$ för ett $k \in \mathbb{Z}$. Alltså $27^{5^{2014}} = (27^{16})^k \cdot 27^9 \equiv_{17} 1 \cdot 10^9$.
$10^2 = 100 \equiv_{17} -2$, $10^8 \equiv_{17} 16 \equiv_{17} -1$ och $10^9 \equiv_{17} -10 \equiv_{17} 7$, så det är den sökta resten.

Svar: Den sökta resten är 7.

---

7) (4p) $|A| = a$, $|B| = b$, $|X| = n$, där $A \cap B = \varnothing$ och $a + b \geq n$, $n \geq a$, $n \geq b$.
Vi söker antalet surjektioner $f : A \cup B \to X$ vars restriktioner till A och B är injektioner.

Lösning: f:s värden på A kan väljas på $\frac{n!}{(n-a)!}$ sätt (injektion från a-mängd till n-mängd).
För att f skall vara en surjektion måste X:s övriga $n - a$ värden antas av $n - a$ av B:s element. Det kan ske på $\frac{b!}{(b-(n-a))!} = \frac{b!}{(a+b-n)!}$ sätt (injektion från en $(n - a)$-mängd till en b-mängd(!)).
Värdena i B:s övriga $a + b - n$ element kan väljas fritt, men olika, bland de X-värden f antar på A. Det kan ske på $\frac{a!}{(a-(a+b-n))!} = \frac{a!}{(n-b)!}$ sätt (injektion från en $b - (n - a)$-mängd till en a-mängd(!)).
Multiplikationsprincipen ger det totala antalet som produkten av de ovanstående.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{n! \cdot a! \cdot b!}{(a+b-n)! \cdot (n-a)! \cdot (n-b)!}$.
(Notera att svaret som sig bör är symmetriskt i a och b. Kontrollera också med fallen $n = a + b$ och $n = a$.)

---

8) G är gruppen $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$ och vi söker (a, 1p) alla element i G och (b, 3p) för vilka $x \in G$ permutationen π_x av G (given av $\pi_x(y) = xy$ för $y \in G$) är jämn och för vilka den är udda.

Lösning: a. $x \in \mathbb{Z}_{18}$ är inverterbart omm $\text{sgd}(x, 18) = 1$, så $G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
b. I $\mathbb{Z}_{18}$: $5 \cdot 1 = 5$, $5 \cdot 5 = 25 = 7$, $5 \cdot 7 = 35 = 17$, $5 \cdot 17 = 5(-1) = -5 = 13$,
$5 \cdot 13 = 5(-5) = -5 \cdot 5 = -7 = 11$, $5 \cdot 11 = 5(-7) = -17 = 1$,
så $\pi_5 = (1\ 5\ 7\ 17\ 13\ 11)$, en udda permutation (ett udda antal cykler av jämn längd).
Eftersom $\pi_{x^k}(y) = x^k y = \pi_x(\pi_x(\ldots \pi_x(y) \ldots)) = (\pi_x)^k(y)$ är
$\pi_7 = (\pi_5)^2$, $\pi_{17} = (\pi_5)^3$, $\pi_{13} = (\pi_5)^4$, $\pi_{11} = (\pi_5)^5$, $\pi_1 = (\pi_5)^6$.
π_5 är enligt ovan udda, så π_1, π_7, π_{13} är jämna (jämna potenser av udda) och π_5, π_{11}, π_{17} udda.
(Man kan förstås också finna π_7 osv på samma sätt som π_5 bestämdes ovan.)

Svar a: $G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$,
b: π_x är jämn för $x = 1, 7, 13$, udda för $x = 5, 11, 17$.

---

9) $G = (V, E)$ är en sammanhängande graf med $|V| = n$. Vi söker G:s kromatiska polynom $P_G(\lambda)$ (a, 2p) då G bara har en cykel, en 3-cykel, (b, 1p) då G bara har en cykel, en 4-cykel, och (c, 2p) då G har precis k cykler, alla 3-cykler, utan gemensamma kanter.

Lösning: Vi använder att $P_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$ om T är ett träd med n hörn.
a. Om e är en kant i (den enda) 3-cykeln är $G - e$ och G/e (vanliga beteckningar) träd med n respektive $n-1$ hörn, så (känd rekursiosformel) $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda) =$
$= \lambda(\lambda-1)^{n-1} - \lambda(\lambda-1)^{n-2} = \lambda(\lambda-1)^{n-2}((\lambda-1)-1) = \lambda(\lambda-1)^{n-2}(\lambda-2)$.
b. Om e nu är en kant i (den enda) 4-cykeln är $G - e$ och G/e ett träd med n hörn respektive en graf med $n-1$ hörn och precis en cykel, en 3-cykel, så (med resultatet i a)) $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda) =$
$= \lambda(\lambda-1)^{n-1} - \lambda(\lambda-1)^{n-3}(\lambda-2) = \lambda(\lambda-1)^{n-3}((\lambda-1)^2-(\lambda-2)) = \lambda(\lambda-1)^{n-3}(\lambda^2-3\lambda+3)$.
c. Lite prövande ger hypotesen $S_k : P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-k-1}(\lambda-2)^k$.
Vi visar S_k med induktion över k (med n godtyckligt).
Bas: S_0 är sann, ty om $k = 0$ är G ett träd och $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1} = \lambda(\lambda-1)^{n-0-1}(\lambda-2)^0$.
Steg: Antag att S_r är sann för ett $r \in \mathbb{N}$.
Om G har $r+1$ cykler, alla 3-cykler, och e är en kant i en av dem har $G - e$ n hörn och r 3-cykler och G/e $n-1$ hörn och r 3-cykler. Det ger med samma rekursion som i a. att
$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda) \overset{\text{IA}}{=} \lambda(\lambda-1)^{n-r-1}(\lambda-2)^r - \lambda(\lambda-1)^{(n-1)-r-1}(\lambda-2)^r =$
$= \lambda(\lambda-1)^{n-2-r}(\lambda-2)^r((\lambda-1)-1) = \lambda(\lambda-1)^{n-(r+1)-1}(\lambda-2)^{r+1}$,
så om S_r är sann är S_{r+1} också det. Med S_0 ger induktionsprincipen S_k för alla $k \in \mathbb{N}$.
(Om man motiverar ordentligt kan man också resonera kombinatoriskt.)

Svar a: $\boldsymbol{P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-2}(\lambda-2)}$,
b: $\boldsymbol{P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-3}(\lambda^2-3\lambda+3)}$,
c: $\boldsymbol{P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-k-1}(\lambda-2)^k}$.

---

10) $\mathcal{P}$ är en regelbunden **pentatop**, en "fyrdimensionell tetraeder". $\mathcal{P}$:s symmetrirotationer motsvarar jämna permutationer av hörnen. Vi söker (a, 1p) antalet rotationssymmetrier för $\mathcal{P}$, (b, 2p) antalet väsentligt olika sätt att färga $\mathcal{P}$:s hörn med (högst) k färger och (c, 2p) motsvarande för färgning av $\mathcal{P}$:s kanter.

Lösning: a. Det sökta antalet är antalet permutationer i A_5, dvs $\frac{|S_5|}{2} = \frac{5!}{2} = 60$.
b. Vi använder Burnsides lemma, så det sökta antalet är $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$, där G är symmetrigruppen (A_5) och $|X_g|$ antalet färgningar som inte ändras då g verkar (roterar $\mathcal{P}$).
$|X_g| = k^c$, där c är antalet banor för g:s verkan på hörnen (samma färg på hörn i samma bana).

Typ av g	antal sådana	$\lvert X_g\rvert$
$[1^5]$ (dvs id)	1	k^5
$[2^21]$	$\frac{1}{2}\cdot\binom{5}{2,2,1} = 15$	k^3
$[31^2]$	$\binom{5}{2}\cdot 2 = 20$	k^3
$[5]$	$\frac{5!}{5} = 24$	k^1

(En permutation är ju jämn omm antalet cykler av jämn längd är jämnt.)
Antalet väsentligt olika färgningar blir
$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g| = \frac{1}{60}(k^5 + 35k^3 + 24k)$.

c. Antalet kanter i $\mathcal{P}$ är $\binom{5}{2} = 10$ (varje par av hörn bestämmer en kant). Vi behöver antalen banor då de olika g verkar på kanterna:
$[1^5]$: 10 banor (varje kant är ensam i sin bana).
$[2^21]$: $(1\,2)(3\,4)(5)$ har banorna $\{12\}, \{13, 24\}, \{14, 23\}, \{15, 25\}, \{34\}, \{35, 45\}$, 6 stycken.
$[31^2]$: $(1\,2\,3)(4)(5)$ har banorna $\{12, 23, 13\}, \{14, 24, 34\}, \{15, 25, 35\}, \{45\}$, 4 stycken.
$[5]$: $(1\,2\,3\,4\,5)$ har banorna $\{12, 23, 34, 45, 15\}, \{13, 24, 35, 14, 25\}$, 2 stycken.
(Antalet banor blir förstås samma för alla permutationer med samma cykelstruktur, byt bara namn på hörnen.)

Typ av g	antal sådana	$\lvert X_g\rvert$
$[1^5]$ (dvs id)	1	k^{10}
$[2^21]$	15	k^6
$[31^2]$	20	k^4
$[5]$	24	k^2

Antalet väsentligt olika färgningar blir nu
$\frac{1}{60}(k^{10} + 15k^6 + 20k^4 + 24k^2)$.

Svar a: 60 st, b: $\boldsymbol{\frac{1}{60}(k^5 + 35k^3 + 24k)}$ **färgningar,**
c: $\boldsymbol{\frac{1}{60}(k^{10} + 15k^6 + 20k^4 + 24k^2)}$ **färgningar.**
