

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen

SF1662, DISKRET MATEMATIK för CLGYM1, TSVDK2

onsdagen den 20 augusti 2014, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.

OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

1) (3p) Avgör om $155 \in \mathbb{Z}_{228}$ är inverterbart och finn i så fall dess invers.

(Dvs, ange ett element i $\mathbb{Z}_{228} = \{0, 1, \dots, 227\}$ som är invers till 155, eller visa att inget finns.)

2) (3p) Visa att för alla $n = 1, 2, \dots$ gäller att

$$\sum_{k=1}^n k(3k+1) \left(= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) \right) = n(n+1)^2.$$

3) (3p) Man har 10 (olika) färgade kulor och 50 (identiska) svarta kulor.

På hur många olika sätt kan de sextio kulorna ordnas så att varje färgad kula har två svarta grannar och ingen svart kula har två färgade grannar?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.)

(Ordningar där två svarta kulor bytt plats räknas som samma. En kulas grannar är kulorna omedelbart före och efter den. Första och sista kulan har bara en granne var.)

4) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av

$$\pi(1)=7, \pi(2)=4, \pi(3)=1, \pi(4)=8, \pi(5)=6, \pi(6)=5, \pi(7)=3, \pi(8)=2.$$

a) (1p) Skriv π i cykelnotation.

b) (1p) $\tau \in S_8$ ges (i cykelnotation) av $(1\ 8\ 2)(3\ 6\ 5)(4\ 7)$. Ange $\pi^{-1}\tau$ (i cykelnotation).

c) (1p) För $\sigma \in S_8$, är $\sigma^3\pi^{-2}\tau\sigma^{-1}\tau$ en jämn eller udda permutation? Motivera.

Vänd!

- 5) (3p) Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf (där, förstås, $X \cap Y = \emptyset$ och $|e \cap X| = |e \cap Y| = 1$ för alla $e \in E$), sådan att alla X -hörnens valenser är olika och ≥ 1 . Måste det finnas en fullständig matchning i G ?
Visa eller ge motexempel.
-

DEL II

- 6) (4p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $19 \mid (13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12)$, dvs
$$13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 \equiv 12 \pmod{19}.$$
- 7) Låt $(U_{21}, \cdot)$ vara gruppen av inverterbara element i $(\mathbb{Z}_{21}, \cdot)$.
- a) (1p) Ange alla element i U_{21} .
- b) (3p) Finn ordningarna för elementen 2 och 16 i U_{21} .
- 8) Låt $a, m, x \in \mathbb{Z}$.
- a) (2p) Om $ax \equiv 1 \pmod{m}$, måste det finnas $y \in \mathbb{Z}$ med $my \equiv 2 \pmod{a}$?
- b) (2p) Om $ax \equiv 2 \pmod{m}$, måste det finnas $y \in \mathbb{Z}$ med $my \equiv 1 \pmod{a}$?
- Motivera svaren.
-

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

- 9) Låt $S_{\mathbb{Z}}$ vara mängden av bijektioner från $\mathbb{Z}$ till $\mathbb{Z}$, heltalen. $(S_{\mathbb{Z}}, \circ)$ är då en grupp, (med $\circ$ sammansättning av funktioner). Det behöver du inte visa.
- a) (1p) Vilket element i $S_{\mathbb{Z}}$ är identitetselement och vilket är invers till $f \in S_{\mathbb{Z}}$?
- b) (4p) För $A \subseteq \mathbb{Z}$, låt $K_A = \{f \in S_{\mathbb{Z}} \mid f(x) \in A \text{ för alla } x \in A\}$.
Är $(K_A, \circ)$ säkert (dvs för alla A) en delgrupp till $(S_{\mathbb{Z}}, \circ)$? Visa eller ge motexempel.
- 10) (5p) Ett enkelt men smakfullt armband består av 5 svarta, 2 röda och 2 vita pärlor uppträdde på en ögla av snöre.
Hur många väsentligt olika sådana armband finns det?
Pärlorna ser likadana ut från båda håll och armbanden kan vändas och vridas.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.