

**Lösningar tentan SF1662 DISKRET MATEMATIK, CL1,
25 maj 2013**

Tryckfel kan förekomma.

1) (3p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}_{143}$ med $55x + 16 = 5$.

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $55x = 5 - 16 = 132$ i $\mathbb{Z}_{143}$, vilket betyder $55x = 132 + 143y$ för något $y \in \mathbb{Z}$.

Euklides algoritim: $143 = 2 \cdot 55 + 33$ $11 = 33 - 22 = 33 - (55 - 33) =$
 $55 = 1 \cdot 33 + 22$ $= -55 + 2 \cdot 33 = -55 + 2(143 - 2 \cdot 55) =$
 $33 = 1 \cdot 22 + 11$ $= 2 \cdot 143 - 5 \cdot 55$
 $22 = 2 \cdot 11$

Eftersom $132 = 12 \cdot 11$ är ekvationen för x, y ekvivalent med $5x - 13y = 12$ och enligt ovan är $1 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5$, vilket ger $-12 = 13 - 5 \cdot 5$, dvs $12 = 5 \cdot 5 - 13$ och $x_0 = 5, y_0 = 1$ är en lösning. För varje lösning x, y gäller då $5(x - 5) = 13(y - 1)$, så $13 \mid (x - 5)$ ($\text{sgd}(5, 13) = 1$), dvs $x = 5 + 13k, y = 1 + 5k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Varje $k \in \mathbb{Z}$ ger också en lösning. Den givna ekvationens lösningar (i $\mathbb{Z}_{143}$) ges av de k som ger $0 \leq x < 143$, dvs

Svar: Alla lösningar är $x = 5, 18, 31, 44, 57, 70, 83, 96, 109, 122, 135$.

2) (3p) Med Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definierade av $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N}$, skall vi visa att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \dots + F_{2n-2} F_{2n-1} + F_{2n-1} F_{2n} = (F_{2n})^2.$$

Lösning: Vi visar med induktion påståendet P_n enligt ovan för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Bas: P_1 är sant, ty $F_1 F_2 = F_1 (F_0 + F_1) = 1(1 + 0) = 1 = 1^2 = (F_2)^2$.

Steg: Antag P_k för ett godtyckligt $k \in \mathbb{Z}_+$, dvs $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2k-1} F_{2k} = (F_{2k})^2$.

Då fås $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2(k+1)-1} F_{2(k+1)} \stackrel{\text{IA}}{=} (F_{2k})^2 + F_{2k} F_{2k+1} + F_{2k+1} F_{2k+2} = F_{2k}(F_{2k} + F_{2k+1}) + F_{2k+1} F_{2k+2} = F_{2k} F_{2k+2} + F_{2k+1} F_{2k+2} = (F_{2k} + F_{2k+1}) F_{2k+2} = (F_{2k+2})^2$. Så om P_k är sant är P_{k+1} sant och **enligt induktionsprincipen är saken klar**.

3) (3p) Ture skall fördela 14 dagar särskiljbar diskretmatte och 7 dagar enahanda bad, utan baddagar i rad och första och sista dagen med matte. Vi söker antalet sätt det kan ske.

Lösning: Diskretdagarna kan ordnas inbördes på $14!$ sätt. För varje val av deras ordning kan baddagar placeras in på $\binom{13}{7} = \frac{13!}{7! \cdot 6!}$ sätt (13 möjliga platser mellan mattedagar, högst en baddag i varje mellanrum). Multiplikationsprincipen ger det sökta antalet sätt: $14! \cdot \frac{13!}{7! \cdot 6!}$.

Svar: Ture kan lägga upp sin semester på $\frac{14! \cdot 13!}{7! \cdot 6!} (= 149597947699200)$ sätt.

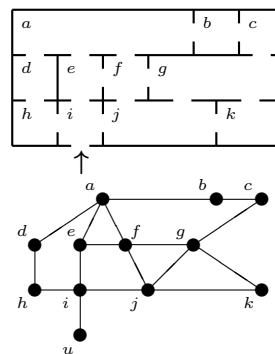
4) (3p) G är gruppen $(U(\mathbb{Z}_{28}), \cdot)$ och vi skall (a, 1p) finna alla element i G och (b, 2p) avgöra om 5 är en generator för G .

Lösning: G innehåller alla x med $0 \leq x \leq 27$ och $\text{sgd}(x, 28) = 1$. Det betyder att $G = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\}$.

5 är en generator för G omm $o(5) = |G| = 12$. Möjliga ordningar är de positiva delarna till $|G| = 12$, dvs 1, 2, 3, 4, 6, 12. 5 är alltså en generator omm $5^4 \neq 1$ och $5^6 \neq 1$. Man finner i G att $5^2 = 25 = -3, 5^4 = (-3)^2 = 9, 5^6 = (-3) \cdot 9 = 1$. 5 är alltså inte en generator för G .

Svar a: $G = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\}$, **b:** 5 är inte en generator.

5) (3p) Vi skall avgöra om det är möjligt att passera varje dörr exakt en gång om man går in i huset vid pilen och i vilket rum man i så fall kan befinna sig när man är klar.



Lösning: Vi bildar grafen med ett hörn för varje rum (och ett för utsidan) och kanter mellan rum som har dörr mellan sig. Den har precis två hörn med udda valens, u och e . Det går alltså (Euler) att passera varje dörr (kant) precis en gång. Man måste sluta i det andra udda hörnet, e .

Svar: Det är möjligt. Man slutar i rum e .

6) (4p) Vi söker (minsta icke-negativa) resten då $25^{5^{2013}}$ divideras med 17.

Lösning: Enligt Fermats lilla sats är $25^{16} \equiv_{17} 1$, ty 17 är ett primtal och $17 \nmid 25$. Eftersom $5^2 = 25 \equiv_{16} 9$ är $5^4 \equiv_{16} 9^2 = 81 \equiv_{16} 1$ och $5^{2013} = (5^4)^{503} \cdot 5 \equiv_{16} 5$, så $5^{2013} = 16k + 5$ för ett $k \in \mathbb{Z}$. Alltså $25^{5^{2013}} = (25^{16})^k \cdot 25^5 \equiv_{17} 1 \cdot 8^5$. $8^2 = 64 \equiv_{17} -4$, $8^4 \equiv_{17} 16 \equiv_{17} -1$ och $8^5 \equiv_{17} -8 \equiv_{17} 9$, så det är den sökta resten.

Svar: Den sökta resten är 9.

7) Med $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ skall vi dels (a, 1p) skriva π_1, π_2 på cykelform och ange deras ordningar och dels (b, 3p) finna antalet olika $\sigma \in S_8$ som för $i = 1, 2$ uppfyller $\sigma\pi_i = \pi_i\sigma$.

Lösning: a) Man finner $\pi_1 = (124)(35)(6)(78)$ (ty $\pi_1(1) = 2, \pi_1(2) = 4$ etc.), $\pi_2 = (142)(3857)(6)$. Ordningen för en permutation är mgm av cykellängderna, så $o(\pi_1) = 6$, $o(\pi_2) = 12$.

b) $\sigma\pi_i = \pi_i\sigma$ är ekvivalent med $\sigma\pi_i\sigma^{-1} = \pi_i$ och $\sigma\pi\sigma^{-1}$ har samma cykler som π , men varje k ersatt med $\sigma(k)$, så $\sigma\pi_1\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(4))(\sigma(3)\sigma(5))(\sigma(6))(\sigma(7)\sigma(8))$, $\sigma\pi_2\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(4)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(8)\sigma(5)\sigma(7))(\sigma(6))$.

$\sigma\pi_i\sigma^{-1} = \pi_i$ kräver att alla element i en π_i -cykel tas till alla elementen i en π_i -cykel, i samma ordning. 3-cyklerna i π_1, π_2 ger samma tre möjligheter ($\sigma(1)$ kan vara 1, 2 eller 4 och $\sigma(2), \sigma(4)$ bestäms av det). P.s.s. ger 4-cyklern i π_2 fyra möjligheter ($\sigma(3)$ kan vara 3, 8, 5 eller 7 och $\sigma(8), \sigma(5), \sigma(7)$ bestäms av det). Eftersom $(3857)^2 = (35)(78)$ gäller $\sigma(3857)\sigma^{-1} = (3857) \Rightarrow \sigma(35)(78)\sigma^{-1} = (35)(78)$. 1-cyklerna ger $\sigma(6) = 6$. Multiplikationsprincipen ger det totala antalet sådana σ som $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ (valen av $\sigma(1)$ och $\sigma(3)$ kan göras oberoende av varandra).

Svar a: $\pi_1 = (124)(35)(6)(78)$, $\pi_2 = (142)(3857)(6)$, $o(\pi_1) = 6$, $o(\pi_2) = 12$,
b: Det finns 12 olika sådana σ .

8) $H \subseteq K$ är delgrupper till G , en ändlig grupp. Vi skall visa att $(G : H) = (G : K) \cdot (K : H)$.

Lösning: K är unionen av $(K : H)$ st disjunkta sidoklasser kH till H . Varje sidoklass gK till K i G är då unionen av $(K : H)$ st disjunkta sidoklasser gkH till H i G (disjunkta mängder tas till disjunkta mängder då man multiplicerar med $g \in G$ eftersom $gx = gy \Rightarrow x = y$). Eftersom G är unionen av $(G : K)$ disjunkta sidoklasser till K är alltså G unionen av $(G : K) \cdot (K : H)$ disjunkta sidoklasser till H , men det antalet är ju också $(G : H)$.
Saken är klar.

(G behöver inte vara ändlig. Det räcker att $(G : H)$ är det. Detta var den avsedda uppgiften, men tillägget att G är ändlig gjorde den enklare än det var meningen: om G är ändlig är $(G : H) = \frac{|G|}{|H|}$ etc.)

9) (5p) Vi söker alla gaussiska heltal x och y sådana att $(7+6i)x + (8+i)y = 1+i$.

Lösning: Vi börjar som i ett motsvarande reellt problem med att bestämma $\text{sgd}(7+6i, 8+i)$.

Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 7+6i &= (1+i)(8+i) - 3i & \left(\frac{7+6i}{8+i} = \frac{(7+6i)(8-i)}{65} = \frac{62+41i}{65} \approx 1+i \right) \\ 8+i &= 3i(-3i) + (-1+i) & \left(\frac{8+i}{3i} = \frac{(8+i)(i)}{3} = \frac{-1+8i}{3} \approx 3i \right) \\ -3i &= (-1+i)(-1+i) - i & \left(\frac{-3i}{-1+i} = \frac{(-3i)(-1-i)}{2} = \frac{-3+3i}{2} \approx -1+i \right) \\ -1+i &= (-1-i)(-i) + 0 & \text{så sgd}(7+6i, 8+i) = -i \text{ (dvs 1)}. \end{aligned}$$

Baklänges:

$$\begin{aligned} -i &= -3i - (-1+i)(-1+i) = -3i - (-1+i)((8+i) - 3i(-3i)) = \\ &= (1-i)(8+i) + (-2-3i)(-3i) = \\ &= (1-i)(8+i) + (-2-3i)((7+6i) - (1+i)(8+i)) = \\ &= (-2-3i)(7+6i) + 4i(8+i). \end{aligned}$$

En lösning är alltså $x_0 = (-2-3i)\frac{1+i}{-i} = 5+i$, $y_0 = 4i\frac{1+i}{-i} = -4-4i$. x, y är en lösning om $(7+6i)(x-x_0) + (8+i)(y-y_0) = 0$, så $(7+6i)$ och $8+i$ är relativt prima $x = x_0 + k(8+i)$, $y = y_0 - k(7+6i)$ för ett $k \in \mathbb{Z}[i]$. Alla dessa är också lösningar.

Svar: Alla lösningar ges av
$$\begin{cases} x = (5+i) + k(8+i) \\ y = (-4-4i) - k(7+6i), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}[i] \text{ godtyckligt.}$$

10) Låt $G = (X \cup Y, E)$ är en 2-reguljär bipartit graf med $|X| = n$. Vi skall (a, 1p) finna $|Y|$, (b, 1p) visa att det finns en fullständig matchning i G och (c, 3p) finna antalet sådana.

Lösning: a) Eftersom varje kant innehåller precis ett X -hörn och varje sådant ingår i precis två kanter, finns det $2|X| = 2n$ kanter. P.s.s. visas att antalet kanter är $2|Y|$, så $|Y| = |X| = n$.

b) Låt $A \subseteq X$. Antalet kanter från A är $2|A|$ (som i a)). Antalet kanter från $P(A)$ är p.s.s. $2|P(A)|$, där $P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$. Men alla de förra hör till de senare, så $|A| \leq |P(A)|$ och Halls sats (giftermålssatsen) ger att **det finns en fullständig matchning**.

c) Varje komponent i G är en cykel av jämn längd (om man utgår från ett hörn och följer nya kanter, slutar det i samma hörn och det finns inga ytterligare kanter från den bildade cykeln). Alla hörnen i en cykel av jämn längd kan matchas fullständigt på två sätt (precis varannan kant ingår). För varje komponent kan vi alltså välja matchningen där på två sätt. Multiplikationsprincipen ger (valen i de olika komponenterna kan göras oberoende av varandra) att det sökta antalet är 2^c , där c är antalet komponenter i G .

Svar a: $|Y| = n$, **b:** Visat ovan (följer också av c)),

c: Antalet olika fullständiga matchningar är 2^c , c antalet komponenter i G .