

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen
SF1662, DISKRET MATEMATIK för CL1
lördagen den 25 maj 2013, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.

OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

1) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{143}$ som uppfyller att $55x + 16 = 5$.

2) (3p) Låt som vanligt Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ för } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Visa att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \dots + F_{2n-2} F_{2n-1} + F_{2n-1} F_{2n} = (F_{2n})^2.$$

3) (3p) Ture Teknolog har 21 dagar solig semester framför sig. Han vill ägna 14 av dagarna åt diskret matte och 7 dagar åt tillämpad vågrörelselära (bad). På hur många sätt kan han fördela dagarna om det skall vara diskret första och sista dagen, aldrig mer än en dag bad i rad, han har 14 olika (särskiljbara) endagsavsnitt diskretmatte som kan läsas i godtycklig ordning och baddagarna är enahanda (dvs inte särskiljbara)?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{28}), \cdot)$, dvs de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{28}$, med operationen multiplikation.

a) (1p) Finn alla element i G .

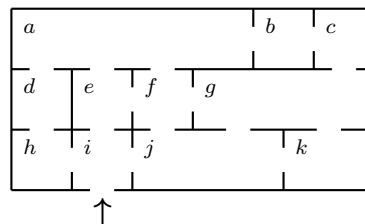
b) (2p) Avgör om elementet 5 är en generator för G .

Vänd!

5) (3p) Härintill syns planen för ett hus, med rum och med dörrar mellan rummen.

Avgör om det är möjligt att gå in (vid pilen) och sedan passera varje dörr exakt en gång.

Om det är möjligt, i vilket eller vilka av rummen ($a-k$) kan man befinna sig när man är klar?



DEL II

6) (4p) Vad blir (minsta icke-negativa) resten då $25^{5^{2013}}$ (dvs $25^{(5^{2013})}$) divideras med 17?

7) Permutationerna $\pi_1, \pi_2 \in S_8$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \dots, 8\}$) ges på tvåradarsform av

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) (1p) Skriv π_1 och π_2 på cykelform och ange deras ordningar.

b) (3p) Finn antalet $\sigma \in S_8$ som för både $i = 1$ och $i = 2$ uppfyller $\sigma\pi_i = \pi_i\sigma$.

8) (4p) Låt G vara en ändlig grupp och H, K delgrupper till G , där $H \subseteq K$.

Visa att

$$(G : H) = (G : K) \cdot (K : H),$$

där $(G : H)$ betecknar index för H i G , dvs antalet olika sidoklasser till H i G .

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) Finn alla gaussiska heltal x och y (dvs $x, y \in \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$) sådana att

$$(7 + 6i)x + (8 + i)y = 1 + i.$$

10) Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en 2-reguljär bipartit graf (varje kant har ett hörn (en nod) i X och ett i Y , $X \cap Y = \emptyset$ och alla hörn har valens (grad) 2) med $|X| = n$.

a) (1p) Finn $|Y|$.

b) (1p) Visa att det finns minst en fullständig matchning i G .

c) (3p) Finn antalet olika fullständiga matchningar i G . (Förutsätt inte att det sökta antalet bestäms helt av talet n .)

**Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.
Där kommer så småningom också en kursenkät, fyll i den!**