

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen
SF1662, DISKRET MATEMATIK för CL1
onsdagen den 21 augusti 2013, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 13p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.

OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.

1) (3p) Finn alla $x, y \in \mathbb{Z}$ sådana att $28x - 46y = 4$.

2) (3p) Avgör, med motivering, vilken eller vilka (om någon) av följande som gäller för godtyckliga mängder A och B :

$$1. \mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \quad 2. \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

$\mathcal{P}(X)$ betecknar som vanligt potensmängden till mängden X , $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

3) (3p) I en klubb med 18 flickor och 22 pojkar skall man dansa (pardans, en flicka och en pojke i varje par). Harry (pojke) måste vara med och dansa, men kan inte dansa med Hermione (flicka). På hur många sätt kan 18 par bildas? (Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt gruppen G vara $U(\mathbb{Z}_{36})$, de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{36}$, med multiplikation som operation, och H den minsta delgruppen till G som innehåller elementet 5.

a) (1p) Finn alla G :s element.

b) (2p) Finn alla H :s element och alla H :s sidoklasser.

5) (3p) Avgör (med motivering) i vart och ett av fallen i), ii) och iii) om det finns någon enkel graf med åtta hörn med valenser (grader):

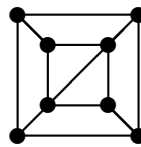
$$\text{i) } 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, \quad \text{ii) } 0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 6, \quad \text{iii) } 1, 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7.$$

(Minns att en enkel graf är en graf utan öglor och multipla kanter.)

Vänd!

DEL II

6) (4p) Avgör för vidstående graf om det finns en sluten (dvs startpunkt = slutpunkt) kurva i planet som korsar varje kant precis en gång och inte går genom något hörn (ge exempel eller motivera varför ingen finns).



7) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_5$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \dots, 5\}$) ges på tvåradarsform av

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) (1p) Ange α och $\alpha\beta$ på cykelform.

b) (1p) Avgör för var och en av α och $\alpha^6\beta\alpha^{-11}\beta^6$ om det är en jämn eller en udda permutation.

c) (2p) Ange på cykelform ett $\pi \in S_5$ sådant att $\beta\pi, (\beta\pi)^2, \dots, (\beta\pi)^6$ alla är olika.

8) (4p) Låt α vara ett reellt tal sådant att $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$.

Visa att

$$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} \quad \text{för alla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Ledning: Vad är $(\alpha + \frac{1}{\alpha})(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n})$?

DEL III

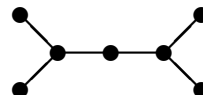
För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) Ett (pytte-)system för RSA-kryptering ges av

$$E(x) = x^9 \pmod{n} \quad \text{och} \quad D(y) = y^{49} \pmod{n}.$$

Finn det största möjliga värdet för talet n .

10) (5p) Sju pärlor är förbundna med trådar som i figuren. På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider en del av eller hela anordningen i rummet) kan man färga precis en pärla röd och var och en av de övriga antingen svart eller vit?



(Två färgningar betraktas alltså som samma om de förs över i varandra av någon permutation av pärlorna som "bevarar strukturen" (dvs avbildar grannar på grannar).)

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.