

Lösningar tentan SF1662 DISKRET MATEMATIK, CL1,

15 augusti 2012

Tryckfel kan förekomma.

1) Vi söker alla lösningar i $\mathbb{Z}_{225}$ till ekvationen $35x + 17 = 82$.

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $35x = 65$ i $\mathbb{Z}_{225}$, som betyder $35x = 65 + 225y$ för något $y \in \mathbb{Z}$, dvs $7x - 45y = 13$.

Euklides algoritm: $45 = 6 \cdot 7 + 3$ $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(45 - 6 \cdot 7) =$
 $7 = 2 \cdot 3 + 1$ $= -2 \cdot 45 + 13 \cdot 7 = 7 \cdot 13 - 45 \cdot 2$

Så $x_1 = 13 \cdot 13 = 169$, $y_1 = 2 \cdot 13 = 26$ löser ekvationen, liksom $x_0 = x_1 - 3 \cdot 45 = 34$, $y_0 = y_1 - 3 \cdot 7 = 5$. Om x, y är en lösning fås $7(x - x_0) - 45(y - y_0) = 0$, så $(\text{sgd}(7, 45) = 1) 45 \mid x - x_0$. Det ger $x = x_0 + 45a$ (och $y = y_0 + 7a$). Dessa löser också ekvationen för godtyckligt $a \in \mathbb{Z}$. Värdena i $\mathbb{Z}_{225}$ blir 34, 79, 124, 169 och 214.

Svar: Alla lösningar är $x = 34, 79, 124, 169, 214$.

2) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ har $a_0 = 9$ och uppfyller $a_{n+1} = 3(a_n)^4 + 4(a_n)^3$ för $n \in \mathbb{N}$. Vi skall visa att a_n slutar med (minst) 2^n st 9:or.

Lösning: Vi visar med induktion påståendet (P_n) att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

$a_n = b_n \cdot 10^{2^n} - 1$ för något $b_n \in \mathbb{Z}$.

Bas: P_0 är sant, ty $a_0 = 9 = 1 \cdot 10^{2^0} - 1$.

Steg: Antag för $k \in \mathbb{N}$ att P_k är sant, dvs $a_k = b_k \cdot 10^{2^k} - 1$ för något $b_k \in \mathbb{Z}$.

$a_{k+1} = 3(a_k)^4 + 4(a_k)^3 \stackrel{IA}{=} 3(b_k \cdot 10^{2^k} - 1)^4 + 4(b_k \cdot 10^{2^k} - 1)^3 = 3((b_k)^4 \cdot 10^{4 \cdot 2^k} - 4(b_k)^3 \cdot 10^{3 \cdot 2^k} + 6(b_k)^2 \cdot 10^{2 \cdot 2^k} - 4(b_k) \cdot 10^{2^k} + 1) + 4((b_k)^3 \cdot 10^{3 \cdot 2^k} - 3(b_k)^2 \cdot 10^{2 \cdot 2^k} + 3(b_k) \cdot 10^{2^k} - 1) = b_{k+1} \cdot 10^{2^{k+1}} - 1$ för ett $b_{k+1} \in \mathbb{Z}$, så om P_k är sant är P_{k+1} sant.

Enligt induktionsprincipen är saken klar.

[Alternativt: Med $b_n = a_n + 1$ är påståendet att b_n slutar med (minst) 2^n 0:or och rekursionen blir $b_0 = 10$, $b_{n+1} = 3(b_n - 1)^4 + 4(b_n - 1)^3 + 1 = \dots = (3(b_n)^2 - 8b_n + 6)(b_n)^2$. Tydligt fördubblas antalet 0:or i varje steg (och siffran före är en 6:a).]

3) Mängden A har $n \geq 1$ element. Vi söker antalet udda delmängder till A .

Lösning: Låt $a \in A$ (a finns, ty $A \neq \emptyset$) och $B = A \setminus \{a\}$. $|B| = n - 1$, så B har precis 2^{n-1} olika delmängder (multiplikationsprincipen). Varje $C \subseteq B$ svarar mot precis en udda delmängd till A ($|C|$ udda: $C \subseteq A$, $|C|$ jämnt: $C \cup \{a\} \subseteq A$), så det sökta antalet är 2^{n-1} .

Svar: Antalet udda delmängder till A är 2^{n-1} .

[Alt. $f(D) = D \triangle \{a\}$, där $M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$, ger en bijektion mellan udda och jämna $D \subseteq A$.]

4) H är en delgrupp till gruppen $(G, \cdot)$ och L, R är en vänstersidoklass respektive en högersidoklass till H (i G). Vi skall för var och en av $A = \{ab^{-1} \mid a, b \in H\}$, $B = \{ab^{-1} \mid a, b \in L\}$ och $C = \{ab^{-1} \mid a, b \in R\}$ avgöra om den säkert är en delgrupp till G .

Lösning: $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ (ty en delgrupp), så $A \subseteq H$. Om $h \in H$ fås $h1^{-1} = h$, så $h \in A$ (ty $1 \in H$), så $H \subseteq A$. Alltså $A = H$, en delgrupp till G .

Låt $L = gH$, med $g \in G$. $a = gh_1$, $b = gh_2$ ger $ab^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1}$. Enligt ovan antar $h_1h_2^{-1}$ precis alla värden i H , så $B = gHg^{-1}$. B är en delgrupp till G , ty $1 = g1g^{-1} \in B$ och $ghg^{-1}, gh'g^{-1} \in B$ ger $ghg^{-1}gh'g^{-1} = gh'h'g^{-1} \in B$ och $(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in B$.

Låt $R = Hg$, med $g \in G$. $a = h_1g$, $b = h_2g$ ger $ab^{-1} = h_1gg^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}$, så $C = H$, en delgrupp till G .

Svar: A, B och C är alla delgrupper till G .

5) Vi söker de värden $P_G(2)$ (antalet hörnfärgningar av grafen G med högst 2 färger) kan anta.

Lösning: Betrakta enligt ledningen först en (icke-tom) sammanhängande graf. Den kan färgas med 2 färger på antingen 0 sätt (om den inte är bipartit) eller 2 sätt (om den är bipartit – eftersom det går en väg mellan två godtyckliga hörn i en sammanhängande graf, är en 2-färgning helt bestämd av färgen på ett hörn). Enligt multiplikationsprincipen ges antalet sätt att färga en godtycklig graf av produkten av antalen för komponenterna.

Svar: $P_G(2)$ kan vara 0 eller 2^k , där k är antalet komponenter i grafen.

6) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ så att $11x \equiv 4 \pmod{18}$ och $17x \equiv 19 \pmod{21}$.

Lösning: $11x \equiv 4 \pmod{18}$ gäller omm $11x - 18y = 4$ för något y .

Euklides algoritim: $18 = 1 \cdot 11 + 7$ $1 = 4 - 1 \cdot 3 = 4 - (7 - 4) =$
 $11 = 1 \cdot 7 + 4$ $= -7 + 2 \cdot 4 = -7 + 2(11 - 7) =$
 $7 = 1 \cdot 4 + 3$ $= 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 = 2 \cdot 11 - 3(18 - 11) =$
 $4 = 1 \cdot 3 + 1$ $= -3 \cdot 18 + 5 \cdot 11 = 11 \cdot 5 - 18 \cdot 3$

så $4 = 11 \cdot 20 - 18 \cdot 12 = 11 \cdot 2 - 18 \cdot 1$ och ($\text{sgd}(11, 18) = 1$) alla lösningar är $x = 2 + 18k$, $k \in \mathbb{Z}$. Insättning i den andra ekvationen ger $17(2 + 18k) \equiv 19 \pmod{21}$, dvs $-8 + (-4)(-3)k \equiv -2 \pmod{21}$, så $12k \equiv 6 \pmod{21}$, dvs $4k \equiv 2 \pmod{7}$. Alla lösningar är $k = 4 + 7n$, $n \in \mathbb{Z}$ (ty $\text{sgd}(2, 7) = 1$). Insättning ger $x = 2 + 18(4 + 7n) = 74 + 126n$.

Svar: Alla lösningar är $x = 74 + 126n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7) Med Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definierade av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N}$, skall vi visa att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller

$$F_{2n-1} = (F_{n-1})^2 + (F_n)^2, \quad F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Lösning: Vi visar med induktion påståendet P_n enligt ovan för alla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Bas: P_1 är sant, ty $F_1 = 1 = 0^2 + 1^2 = (F_0)^2 + (F_1)^2$ och $F_2 = 1 = 1(1 + 0) = F_1(F_2 + F_0)$.

Steg: Antag P_k för $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dvs $F_{2k-1} = (F_{k-1})^2 + (F_k)^2$, $F_{2k} = F_k(F_{k+1} + F_{k-1})$.

Då fås $F_{2(k+1)-1} = F_{2k+1} = F_{2k-1} + F_{2k} \stackrel{\text{IA}}{=} (F_{k-1})^2 + (F_k)^2 + F_k(F_{k+1} + F_{k-1}) = (F_k)^2 + F_{k-1}(F_{k-1} + F_k) + F_k F_{k+1} = (F_k)^2 + (F_{k-1} + F_k)F_{k+1} = (F_k)^2 + (F_{k+1})^2$.

$F_{2(k+1)} = F_{2k+2} = F_{2k} + F_{2k+1} \stackrel{\text{IA, förra}}{=} F_k(F_{k+1} + F_{k-1}) + (F_k)^2 + (F_{k+1})^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) + F_k(F_{k-1} + F_k) = F_{k+1}(F_{k+2} + F_k)$.

Så om P_k är sant är P_{k+1} sant och enligt induktionsprincipen är saken klar.

8) $\pi \in S_{11}$ ges på tvåradarsform av $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 10 & 9 & 11 & 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Vi söker π på cykelform, dess ordning och dess paritet. Dessutom söker vi den högsta ordning en jämn permutation $\tau \in S_{11}$ kan ha och ett exempel på ett sådant τ .

Lösning: Man finner $\pi = (1 \ 7 \ 4 \ 11 \ 6)(2 \ 10 \ 5 \ 3 \ 9 \ 8)$ (ty $\pi_1(1) = 7$, $\pi_1(7) = 4$ etc.). Ordningen för en permutation är mgm av cykellängderna, så $o(\pi) = \text{mgm}(5, 6) = 30$. Eftersom π innehåller precis en cykel av jämn längd är det en udda permutation.

En jämn permutation är en med ett jämnt antal cykler av jämn längd. Vi går igenom möjliga cykellängder och motsvarande ordningar (mgm för längderna) för τ ,

$[11] : 11$, $[9 \ 1^2] : 9$, $[8 \ 2 \ 1] : 8$, $[7 \ 3 \ 1] : 21$, $[7 \ 2^2] : 14$, $[7 \ 1^4] : 7$, $[6 \ 4 \ 1] : 12$, $[6 \ 3 \ 2] : 6$, $[6 \ 2 \ 1^3] : 6$, $[5^2 \ 1] : 5$, $[5 \ 4 \ 2] : 20$, $[5 \ 3^2] : 15$, $[5 \ 3 \ 1^3] : 15$, $[5 \ 2^2 \ 1^2] : 10$, $[5 \ 1^6] : 5$ och flera som tydligt har $\text{mgm} \leq 12$ (enda primfaktorer högst två 2:or och en 3:a). Högst ordning blir tydligen 21, med cykler $[7 \ 3 \ 1]$, t.ex. $\tau = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)(8 \ 9 \ 10)(11)$.

Svar a: $\pi = (1 \ 7 \ 4 \ 11 \ 6)(2 \ 10 \ 5 \ 3 \ 9 \ 8)$, $o(\pi) = 30$ och π är udda,

b: maximal ordning är 21, exempel $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

9) Vi söker antalet väsentligt olika sätt att färga hörnen av ett liksidigt triangulärt prisma med högst k färger.

Lösning: Vi använder Burnsidess lemma (se sammanfattningen av föreläsning 19).

Prismats grupp av symmetrirotationer har 6 element ($|G_x| = 1, |Gx| = 6$ för alla hörn x): Identitetselementet (bevarar alla konfigurationer, $|X_{id}| = k^6$), två rotationer $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring axeln genom de triangulära ytornas mittpunkter (bevarar konfigurationer med samma färg på kulorna vid varje triangel, $|X_g| = k^2$) och tre rotationer π kring axlar genom mittpunkterna av en kvadrat och motstående kant (bevarar konfigurationer med motstående hörn i kvadraten och kantens hörn parvis likfärgade, $|X_g| = k^3$).

Lemmat ger antalet väsentligt olika färgningar, $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$.

Svar: Antalet väsentligt olika färgningar av prismats hörn är $\frac{1}{6}(k^6 + 3k^3 + 2k^2)$.

10) Var och en av personerna i den ändliga mängden X vill läsa vissa av böckerna i den ändliga mängden Y . Vi skall representera detta med en bipartit graf och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna dels (a) en och dels (b) k böcker (som de vill läsa). (Två olika personer kan inte låna samma bok.)

Lösning: Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara den bipartita grafen med hörnmängder X och Y och en kant mellan person $x (\in X)$ och bok $y (\in Y)$ precis om x vill läsa y . Villkoret för att de önskade lånen skall vara möjliga är då att det finns en delmängd E_k till E så att varje $x \in X$ ingår i precis k kanter i E_k och varje $y \in Y$ ingår i högst en kant i E_k (a är fallet $k = 1$).

Genom att betrakta en ny graf G' , som fås genom att "dela upp" varje hörn i X i k st kopior och också "dela upp" alla kanter som går till dem, kan villkoret formuleras som att G' skall ha en fullständig matchning. Genom att tillämpa Halls villkor för existens av en sådan, fås (med bokens beteckningar) att ett nödvändigt och tillräckligt villkor (uttryckt i G) för att lånen skall vara möjliga, är att $|P(A)| \geq k|A|$ för alla $A \subseteq X$.

Svar: Grafen enligt ovan. Villkoret är $|P(A)| \geq k|A|$ för alla $A \subseteq X$. (a är fallet $k = 1$).
