

Matematik, KTH

B.Ek

**Tentamen i kursen**  
**SF1662, DISKRET MATEMATIK för CL1**  
**onsdagen den 15 augusti 2012, klockan 14.00–19.00**

**Examinator:** Bengt Ek, tel 7906951.

**Tillåtna hjälpmedel:** Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E, krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

|           |    |    |    |    |    |                         |
|-----------|----|----|----|----|----|-------------------------|
| För betyg | A  | B  | C  | D  | E  |                         |
| krävs     | 32 | 27 | 22 | 18 | 15 | poäng (inklusive bonus) |

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 12p** totalt, får FX och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E. Se kurssidan.

**För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.**

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

---

## DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.

**OBS! Utan minst 12p på denna del blir tentamen inte godkänd.**

1) (3p) Finn alla lösningar i  $\mathbb{Z}_{225}$  till ekvationen  $35x + 17 = 82$ .

2) (3p) Talföljden  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  definieras av

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3(a_n)^4 + 4(a_n)^3 & \text{för } n \in \mathbb{N}, \\ a_0 = 9. \end{cases}$$

Visa att talet  $a_n$  (skrivet i bas 10) slutar med (minst)  $2^n$  st 9:or (dvs  $a_n + 1$  slutar med (minst)  $2^n$  st 0:or).

3) (3p) Låt  $A$  vara en icke-tom mängd med  $n$  element, dvs  $|A| = n \geq 1$ . Hur många udda delmängder till  $A$  finns det (dvs vad är antalet  $X \subseteq A$  med  $|X|$  udda)?

(Svaret får innehålla  $n$ , heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt  $(G, \cdot)$  vara en grupp,  $H$  en delgrupp till  $G$ ,  $L$  en vänstersidoklass till  $H$  (i  $G$ ) och  $R$  en högersidoklass till  $H$  (i  $G$ ). Avgör (med motivering) om

a) (1p)  $A = \{ab^{-1} \mid a, b \in H\}$  säkert är en delgrupp till  $G$ ,

b) (1p)  $B = \{ab^{-1} \mid a, b \in L\}$  säkert är en delgrupp till  $G$ ,

c) (1p)  $C = \{ab^{-1} \mid a, b \in R\}$  säkert är en delgrupp till  $G$ .

5) (3p) Låt  $P_G(2)$  (som vanligt) vara antalet olika sätt man kan hörnfärga grafen  $G$  med (högst) 2 färger. Bestäm alla värden som  $P_G(2)$  kan anta (för olika grafer  $G$ ).

[Ledning: Betrakta varje komponent av  $G$  för sig.]

*Vänd!*

## DEL II

6) (4p) Finn alla  $x \in \mathbb{Z}$  så att

$$\begin{cases} 11x \equiv 4 & (\text{mod } 18), \\ 17x \equiv 19 & (\text{mod } 21). \end{cases}$$

7) (4p) Låt som vanligt Fibonacci-talen  $\{F_n\}_{n=0}^\infty$  definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ för } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Visa att för alla  $n = 1, 2, 3, \dots$  gäller

$$\begin{cases} F_{2n-1} = (F_{n-1})^2 + (F_n)^2, \\ F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}). \end{cases}$$

8a) (2p) Permutationen  $\pi \in S_{11}$  (gruppen av permutationer av  $\{1, 2, \dots, 11\}$ ) ges på tvåradarsform av

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 10 & 9 & 11 & 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Skriv  $\pi$  på cykelform, finn dess ordning och avgör om  $\pi$  är en udda eller en jämn permutation.

b) (2p) Finn den högsta ordning en jämn permutation  $\tau \in S_{11}$  kan ha och ge (på tvåradarsform) ett exempel på en sådan permutation  $\tau$ .

---

## DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) I vart och ett av de sex hörnen på en kloss i form av ett triangulärt prisma sitter en färgad kula. Hur många väsentligt olika (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider klossen i rummet) sätt att fördela kulornas färger finns det, om man har kulor av  $k$  st färger att tillgå?

Klossens sidoytor är två motstående liksidiga trianglar och tre kvadrater.

10) Givet en (ändlig) mängd  $X$  av personer, vilka var och en vill läsa vissa av böckerna i en (likaså ändlig) mängd  $Y$ .

a) (2p) Beskriv ett lämpligt sätt att representera detta med en bipartit graf och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna en bok (som de vill läsa). (Två olika personer kan inte låna samma bok.)

b) (3p) Finn ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna  $k$  böcker (som de vill läsa).

**Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.**