

Några fler problem som repetition (de inom [] hanns inte med på föreläsningen):

1. Visa att grafen $G = (V, E)$, valenser $\delta(v)$ för $v \in V$, har minst $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1}$ oberoende hörn (dvs sådana att inga av dem är grannar).

Induktion över antalet hörn, $|V|$, i G .

I steget, tag först $v_0 \in V$ med $\delta(v_0)$ minimal och $V' = V \setminus V_0$, där $V_0 = \{v_0\} \cup \{v \in V \mid \{v_0, v\} \in E\}$ (v_0 och dess grannar).

Då är $\sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq (\delta(v_0) + 1) \frac{1}{\delta(v_0)+1} = 1$ och $\sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1} \geq \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1}$, där $\delta'(v)$ är $v \in V'$:s valens som hörn i $G' = (V', E')$ ($E' = \{e \in E \mid e \subseteq V'\}$).

I G' finns n oberoende hörn, $n \geq \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1}$ (induktion).

Med v_0 blir de $n + 1$ st oberoende hörn i G och $\sum_{v \in V} \frac{1}{\delta(v)+1} = \sum_{v \in V_0} \frac{1}{\delta(v)+1} + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta(v)+1} \leq 1 + \sum_{v \in V'} \frac{1}{\delta'(v)+1} \leq 1 + n$.

- 2a. Visa att om de 52 korten i en kortlek delas upp i 13 högar med 4 kort i varje, är det möjligt att välja ett kort ur varje hög så att det blir precis ett kort av varje valör.

- b. Visa att man kan dra ett kort slumpmässigt ur en av högarna och komplettera med ett kort var ur de övriga högarna, så att det ändå blir 13 olika valörer.

Halls sats på $G = (X \cup Y, E)$ med $X = \{\text{högarna}\}$, $Y = \{\text{valörerna}\}$ och kanter från varje hög till dess ingående valörer.

I b. betraktas grafen av de återstående 12 högarna och 12 valörerna. k st av de högarna innehåller minst k av de valörerna (högst 3 kort av den redan dragna valören).

3. Namnen i lådorna (= ex 6**, övn 8).

Fundera själv, men det har med permutationer och deras cykelstruktur att göra.

4. Hur många väsentligt olika färgningar med högst k färger av **kanterna** i en ikosaeder finns det?

Som det andra exemplet på sid. 7 i bladen om gruppverkan, men med kanter. Svaret blir $\frac{1}{60}(k^{30} + 15k^{16} + 20k^{10} + 24k^6)$.

För $k = 2$ blir det 17 912 448 olika färgningar.

5. Visa med naturlig deduktion:

a. $\vdash A \vee \neg A$,

[b.] $A \vee B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$.

a.	1	(1)	$\neg(A \vee \neg A)$	antagande	b.	1	(1)	$A \vee B$	premiss
	2	(2)	A	antagande		2	(2)	$A \rightarrow B$	antagande
	2	(3)	$A \vee \neg A$	2 $\vee I$		3	(3)	A	antagande
	1,2	(4)	$\perp$	1,3 $\neg E$		2,3	(4)	B	2,3 $\rightarrow E$
	1	(5)	$\neg A$	2,4 $\neg I$		5	(5)	B	antagande
	1	(6)	$A \vee \neg A$	5 $\vee I$		1,2	(6)	B	1,3,4,5,5 $\vee E$
	1	(7)	$\perp$	1,6 $\neg E$		1	(7)	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,6 $\rightarrow I$
		(8)	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	1,7 $\neg I$					
		(9)	$A \vee \neg A$	8 DN					

[6.] Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste R ha i en tolkning med $\forall x \forall y (Fy \leftrightarrow (Rxy \leftrightarrow Fx))$ sann?

I en tolkning med $\forall x \forall y (Fy \leftrightarrow (Rxy \leftrightarrow Fx))$ sann är $Fb \leftrightarrow (Rab \leftrightarrow Fa) \equiv Rab \leftrightarrow (Fa \leftrightarrow Fb)$ sann för alla a, b , dvs Rab sann $\Leftrightarrow Fa \leftrightarrow Fb$ sann. R (s tolkning $\mathcal{R}$) är alltså

- **reflexiv**, dvs $\forall x Rxx$ sann, ty för alla a är $Fa \leftrightarrow Fa$ sann, så Raa sann
- **symmetrisk**, dvs $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$ sann, ty Rab sann $\Leftrightarrow Fa \leftrightarrow Fb$ sann $\Leftrightarrow Fb \leftrightarrow Fa$ sann $\Leftrightarrow Rba$ sann, för alla a, b
- **transitiv**, dvs $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ sann, ty $Rab \wedge Rbc$ sann $\Leftrightarrow Fa \leftrightarrow Fb, Fb \leftrightarrow Fc$ sanna $\Rightarrow Fa \leftrightarrow Fc$ sann $\Leftrightarrow Rac$ sann, för alla a, b, c

Svar: $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv (dvs en ekvivalensrelation).

($\mathcal{R}$ har tydligen $\text{Ext}(F)$ och $\mathcal{D} \setminus \text{Ext}(F)$ som ekvivalensklasser.)

[7.] Hattarna (= ex 7**, övn 7).

13. Kortkonsten (= ex 14**, övn 12).

Avslöjas inte här, men postfacksprincipen, modulär aritmetik och permutationer kommer in.