(SF1662 Diskret matte, vt17: F25, on 17 maj 2017)

Några problem som repetition (fler kommer nästa gång):

1. På hur många sätt kan fem byar förenas med vägar så att ingen by är isolerad?

Dvs hur många olika grafer med fem (särskiljbara) hörn och inget isolerat hörn finns det?
Principen om inklusion och exklusion ger det sökta antalet
($|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5)|$, där X är mängden av alla grafer med 5 hörn och A_i de med hörn i isolerat) som
$2^{\binom{5}{2}} - 5 \cdot 2^{\binom{4}{2}} + \binom{5}{2} 2^{\binom{3}{2}} - \ldots = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} 2^{\binom{5-k}{2}} =$
$= 2^{10} - 5 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^0 - 1 \cdot 2^0 = 768.$

2. Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ så att $p(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{125}$.

Idé: $\equiv_{5^i} \Rightarrow \equiv_{5^j}$ om $i \geq j$, så börja $\pmod{5}$ och finn $x = \pm 1 + 5k$, använd i ekv $\pmod{25}$ och få $x = -6 + 25l$ etc.
Svaret blir: **alla $\boldsymbol{x \equiv 94 \pmod{125}}$**.

3. Låt grafen G ha det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$. På hur många sätt kan G hörnfärgas med **exakt** λ färger, dvs så att varje färg används?

Kalla (tillfälligt) det sökta antalet $Q_G(\lambda)$. Svaret är
$\boldsymbol{Q_G(\lambda) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j \binom{\lambda}{j} P_G(\lambda - j)} = \sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda - r} \binom{\lambda}{r} P_G(r)$,
vilket visas med principen om inklusion och exklusion.
Alternativt, från (den enklare) $P_G(\lambda) = \sum_{r=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{r} Q_G(r)$ med **binomialinversion** för talföljder $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$,
$b_k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a_r, \ k = 0, \ldots, n \Leftrightarrow a_k = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} b_r, \ k = 0, \ldots, n.$

4. Låt p och q vara primtal så att $q \mid 2^p - 1$. Visa att $q > p$.

$2^p = 1$ i $\mathbb{Z}_q$, så $o(2) = p$ (p primtal ju) i $(\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}, \cdot)$, av ordning $q - 1$.
Man får $\boldsymbol{p \mid (q-1)}$, speciellt $q > p$.

5. Visa att det finns ett $r \in \mathbb{Z}_+$ så att $4711 \mid \underbrace{731731\ldots731}_{r \text{ st } 731}$.

Postfacksprincipen på $0,\ 731, \ldots, \underbrace{731731\ldots731}_{4711 \text{ st } 731} \pmod{4711}$ (4712 st)
ger att det finns $a, b \in \mathbb{Z}$ med $0 \leq b < a \leq 4711$ och
$4711 \mid (\underbrace{731731\ldots731}_{a \text{ st } 731} - \underbrace{731731\ldots731}_{b \text{ st } 731}) = \underbrace{731731\ldots731}_{a-b \text{ st } 731} \cdot 10^{3b}$.
Eftersom $\mathrm{sgd}(4711, 10) = 1$ duger $r = a - b$.